1 変数複素関数と非圧縮性渦なし 2 次元定常流

2019 年 1 月 29 日（木）　千原浩之

$\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の滑らかな平面ベクトル場で, 流体の 2 次元の定常な速度場, すなわち, 時間変化しない流れの分布を表すものとする.

古典力学としての仮定

- **渦なし**: 渦度は零, すなわち,

$$\mathrm{rot}(u,v,0) = (0,0,0), \quad \text{i.e.,} \quad (0,0,-u_y+v_x) = (0,0,0)$$

すなわち $-u_y+v_x=0$ である.

- **非圧縮性**: 流体運動に沿って密度場 $\rho(x,y)$ は変化しない, すなわち, (u,v) の積分曲線上で ρ は変化しない, すなわち $u\rho_x+v\rho_y=0$ である.
これは, 質量保存則 $(\rho u)_x+(\rho v)_y=0$ を踏まえて $u_x+v_y=0$ と同値になる.

以上を仮定すると, (u,v) のスカラーポテンシャルとなる調和関数 Φ とその共役調和関数 Ψ が存在する. すなわち,

$$u=\Phi_x=\Psi_y, \quad v=\Phi_y=-\Psi_x, \quad \Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0, \quad \Psi_{xx}+\Psi_{yy}=0$$

が成立する. 実際,

$$\Phi(x,y) := \int_0^x u(t,0)dt + \int_0^y v(x,t)dt,$$
$$\Psi(x,y) := -\int_0^x v(t,0)dt + \int_0^y u(x,t)dt$$

とおくと, 渦なし条件 $-u_y+v_x=0$ により $\Phi_x=u$, $\Phi_y=v$ がしたがい, 非圧縮条件と質量保存則から得られる $u_x+v_y=0$ により $\Psi_x=-v$, $\Psi_y=u$ がしたがう. とくに, Φ と Ψ は Cauchy-Riemann の偏微分方程式系をみたすので,

$$W(x+iy) := \Phi(x,y)+i\Psi(x,y)$$

とおくと, $W(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則で, $W'(x+iy)=u(x,y)-iv(x,y)$ となる. Φ を (u,v) の速度ポテンシャル, Ψ を (u,v) の流れの関数, W を (u,v) の複素速度ポテンシャル, という.

$\gamma=\Big\{\big(x(t),y(t)\big) \ \Big| \ t\in[a,b]\Big\}$ をベクトル場 $\big(u,v\big)$ の積分曲線, すなわち, $x(t)$ と $y(t)$ の組は

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\big(x(t),y(t)\big) \\ v\big(x(t),y(t)\big) \end{bmatrix}$$

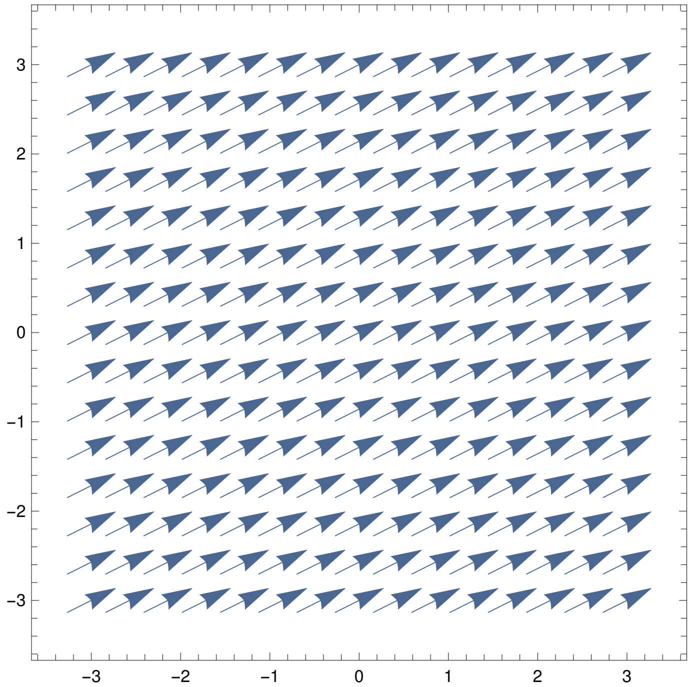
をみたすとする. 流体力学では γ を速度場 (u,v) の流線とよぶが, (u,v) が定常ベクトル場であることから, t を時間変数と見ることにより (u,v) の流跡線（1 つの小粒子の奇跡）に一致し, 初期時刻を変えても流跡線は同じなので (u,v) の流脈線（1 つの固定点を通過する粒子の奇跡）にも一致する. 流れの関数 Ψ は γ に沿って定数である. 実際

$$\frac{d}{dt}\Psi\big(x(t),y(t)\big) = \Psi_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+\Psi_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t) = -vu+uv=0$$

となる. すなわち, Ψ のグラフの等高線のなす曲線は (u,v) の流線である.

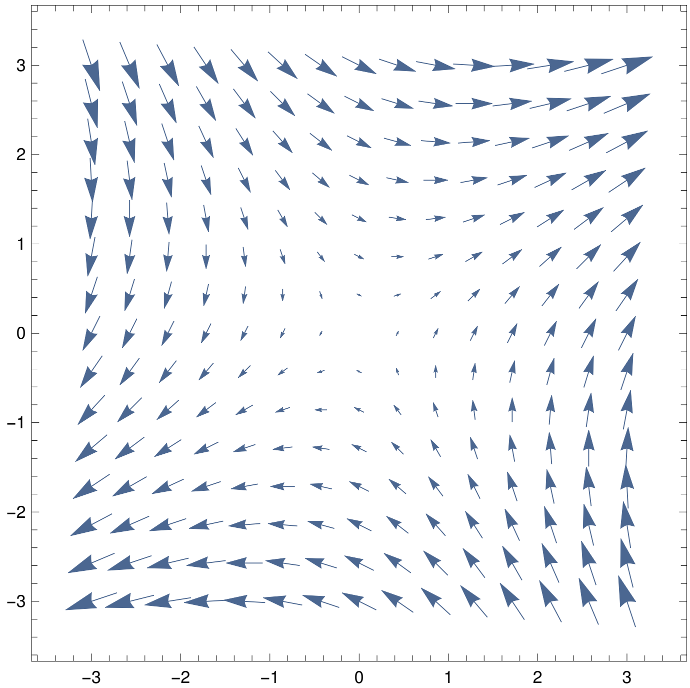
以下ではいくつかの例と速度場 (u, v) の図を紹介する.

- **一様な流れ**. $W(z) = (a - ib)z, (a, b \in \mathbb{R}), \quad (u, v) = (a, b)$.



$(u, v) = (2, 1)$ の図.

- **2 次関数**. $W(z) = (a - ib)z^2/2, (a, b \in \mathbb{R}), \quad (u, v) = (ax + by, bx - ay)$.

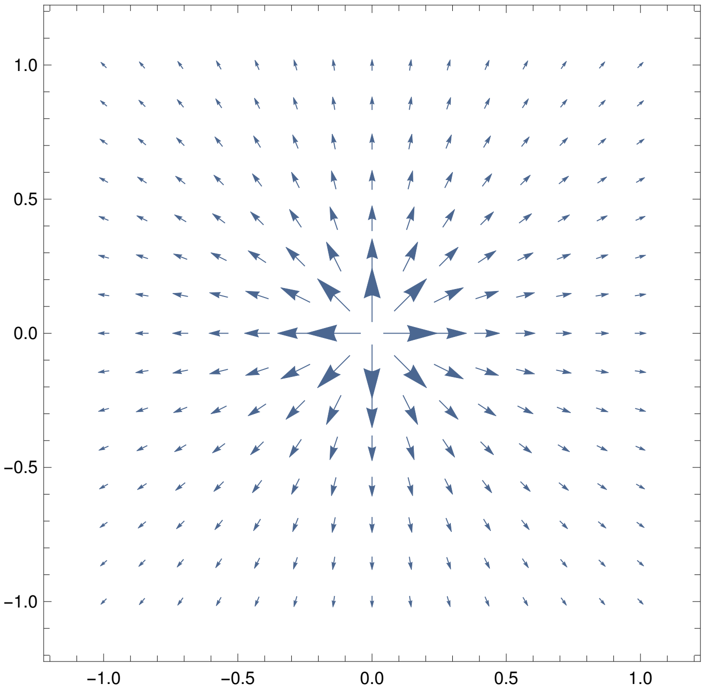


$(u, v) = (x + 2y, 2x - y)$ の図.

複素速度ポテンシャルは正則関数であるから, 正則点でのみ意味をなすが, 孤立特異点も古典力学として意味をもつことがある.

- **湧き出しと吸い込み**. $a\log z, a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\quad (u,v) = \left(\frac{ax}{r^2}, \frac{ay}{r^2}\right), (x+iy = re^{i\theta})$.

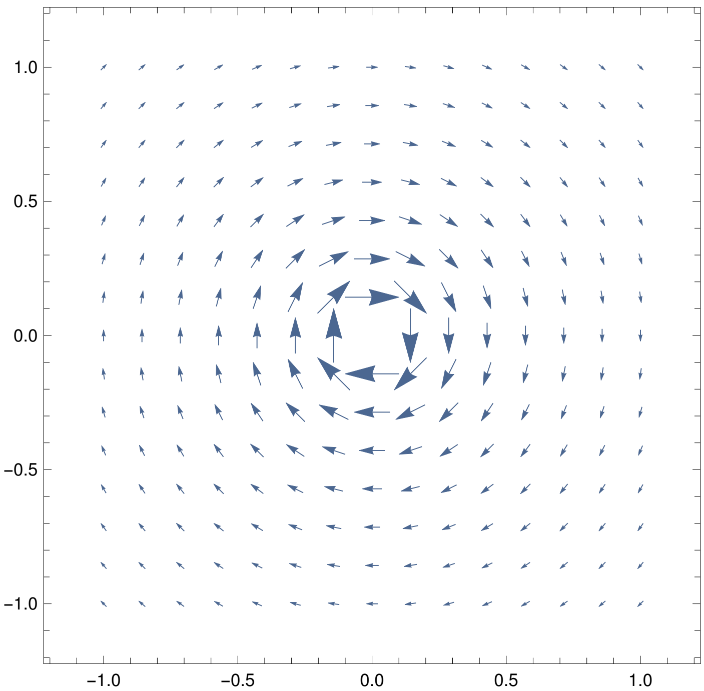
  $\Psi = a\theta$ なので, $\theta =$ 一定, すなわち, 原点を通る直線が流線である. $a>0$ のとき湧き出し, $a<0$ のとき吸い込みを記述すると解釈されている.



$(u,v) = (x/r^2, y/r^2)$ の図.

- **渦**. $ib\log z, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\quad (u,v) = \left(\frac{by}{r^2}, \frac{-bx}{r^2}\right), (x+iy = re^{i\theta})$.

  $\Psi = b\log r$ なので, $r =$ 一定, すなわち, 原点を中心とする円が流線である. $b>0$ のとき時計回り, $b<0$ のとき半時計回りの渦を記述すると解釈されている.

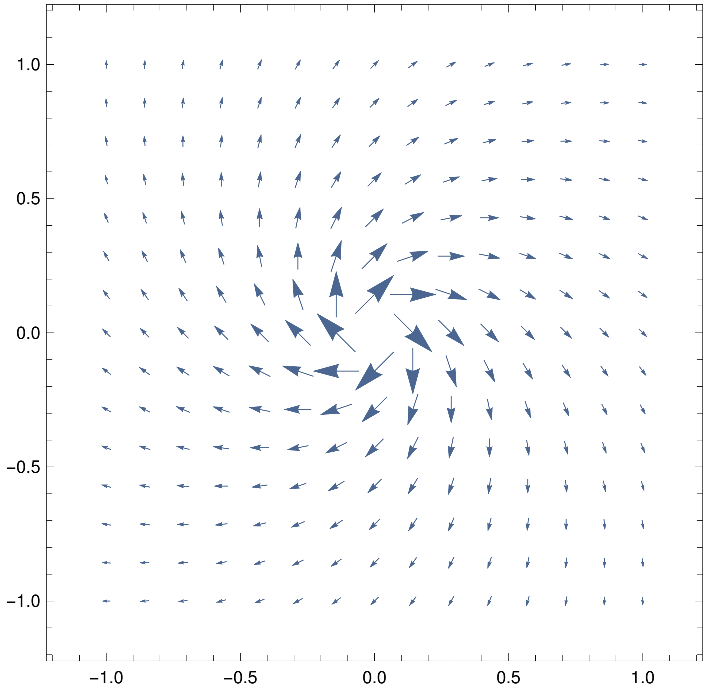


$(u,v) = (y/r^2, -x/r^2)$ の図.

2 つの複素速度ポテンシャルの 1 次結合は複素速度ポテンシャルである.

- **湧き出しまたは吸い込み, と, 渦の重ね合わせ**. 湧き出しと渦を重ねてみる.

$$(u,v)=\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2}\right)+\left(\frac{y}{r^2},\frac{-x}{r^2}\right) \quad \text{の図.}$$



- **双極子**. ある条件をみたす湧き出しと吸い込みを重ねてみる.

$$(u,v)=\left(\frac{-(x-1/2)}{(x-1/2)^2+y^2},\frac{-y}{(x-1/2)^2+y^2}\right)+\left(\frac{(x+1/2)}{(x+1/2)^2+y^2},\frac{y}{(x+1/2)^2+y^2}\right) \quad \text{の図.}$$