2009 年 4 月 1 日
千原 浩之（東北大理）

エルミート関数についてのメモ ver.2

このノートは, エルミート関数の基礎事項をまとめたものである. より詳しくは, Folland [F] の該当部分をスケール変換し, Sjöstrand [Sj] の内容をほんの少し補充して整理したものである. 本稿の内容が必要な時にすべてを計算して確認し, 必要なくなるといつの間にかノートを紛失する, というマヌケなことを何度も繰り返してきたので, LaTeX でノートを作成し保存することにした.
更新履歴. 3/14/09 ver.1 を作成. 4/01/09 第 5節を追加.

1　ユークリッド空間上の大域的 Bargmann 変換

$\mathbb{R}^n$ 上の適当な関数 $u(x)$ の大域的 Bargmann 変換 $Bu(z)$ を

$$Bu(z) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(z^2/4-zx+x^2/2)}u(x)dx, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad C_n = 2^{-n/2}\pi^{-3n/4}$$

と定義する. ここに, $z = (z_1, \dots, z_n), \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して, $z\zeta = z_1\zeta_1 + \cdots + z_n\zeta_n$, $z^2 = zz$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ とする. $e^{-|z|^2/4}Bu(z)$ は, u の大域的 FBI 変換とよばれる. [M] を参照のこと.

$$\left|e^{-(z^2/4-zx+x^2/2)}\right| = e^{|z|^2/4-(x-\mathrm{Re}\, z)^2/2}$$

であるから, $e^{-(z^2/4-zx+x^2/2)}$ は $z \in \mathbb{C}^n$ をパラメータとする $x \in \mathbb{R}^n$ の急減少関数である. よって, 大域的 Bargmann 変換 $Bu(z)$ は緩増加超関数 u に対して定義され, $z \in \mathbb{C}^n$ の正則関数になる.

定理 1. 大域的 *Bargmann* 変換 B は,

$$B : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \left(e^{|z|^2/4}\mathscr{S}(\mathbb{C}^n)\right) \cap \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^n),$$
$$B : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{F}_n = L^2\bigl(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2}L(dz)\bigr) \cap \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^n),$$
$$B : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \left(e^{|z|^2/4}\mathscr{S}'(\mathbb{C}^n)\right) \cap \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^n)$$

となる全単射の線型連続作用素である. ここに, $\mathscr{S}$ は *Schwartz* クラス, L^2 は二乗可積分関数の全体, $\mathscr{S}'$ は緩増加超関数の全体, Hol は正則関数の全体, $L(dz)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の *Lebesgue* 測度である. $\mathscr{F}_n$ は, $L^2\bigl(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2}L(dz)\bigr)$ の閉部分空間で, *Segal-Bargmann* 空間とか *Fock* 空間とよばれる. 特に, $B : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{F}_n$ は, *Hilbert* 空間の同型である：

$$\langle Bu, Bv\rangle_{L^2\left(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2}L(dz)\right)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad u, v \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

ここに, $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathscr{H}}$ は, *Hilbert* 空間 $\mathscr{H}$ の内積とする. B の共役作用素 $B^* : \mathscr{F}_n \to L^2(\mathbb{R}^n)$ は,

$$B^*U(x) = C_n \int_{\mathbb{C}^n} e^{-(\bar{z}^2/4-x\bar{z}+x^2/2)}U(z)e^{-|z|^2/2}L(dz) \tag{1}$$

で与えられ, $B(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n))$ 上に拡張されて, 次が成り立つ：

$$B^* \circ Bu = u, \quad u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \qquad B \circ B^*U = U, \quad U \in B(\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n))$$

さて, B^* を与える (1) は, $U{\in}L^2\big(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2}L(dz)\big)$ に対しても意味をなし, $L^2(\mathbb{R}^n)$ への有界線型作用素になる. よって, $B{\circ}B^* : L^2\big(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2}L(dz)\big) \to \mathscr{F}_n$ は直交射影であり,

$$B{\circ}B^*U(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{C}^n} e^{z\bar{\zeta}/2}U(\zeta)e^{-|\zeta|^2/2}L(d\zeta)$$

で与えられる. 特に, $U \in \mathscr{F}_n$ ならば,

$$U(z) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{C}^n} e^{z\bar{\zeta}/2}U(\zeta)e^{-|\zeta|^2/2}L(d\zeta) \tag{2}$$

であるから, $\mathscr{F}_n$ は $(2\pi)^{-n}e^{z\bar{\zeta}/2}$ を再生核とする再生核 Hilbert 空間である. $e^{z\bar{\zeta}/2}$ の Taylor 展開により, (2) は,

$$U(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\langle U, \varphi_\alpha\rangle_{\mathscr{F}_n}\varphi_\alpha(z), \quad \varphi_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{\sqrt{(2\pi)^n 2^{|\alpha|}\alpha!}}$$

となることに注意する. ここに, $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ で, 多重指数 $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ と $z = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$ とする.

定理 2. $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ は $\mathscr{F}_n$ の完全正規直交系である.

$B^* : \mathscr{F}_n \to L^2(\mathbb{R}^n)$ は Hilbert 空間の同型であるから, $\{B^*\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ の完全正規直交系である. $h_\alpha = B^*\varphi_\alpha$ を（正規化された）α-次の Hermite 関数 (the α-the Hermite function) という.

2 Hermite 関数の具体形と基本性質

α-次の Hermite 関数 $h_\alpha(x) = B^*\varphi_\alpha(x)$ を具体的に求め, さらに基本性質をまとめておこう. 具体形を求める計算には, 単純計算によって得られる次の性質を用いる：

定理 3. 非有界線型作用素 $A_j : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_n$, $P_j : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1,\dots,n$, を

$$A_jU(z) = 2\frac{\partial U}{\partial z_j}(z), \quad U{\in}B(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)), \qquad P_ju(x) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + x_ju(x), \quad u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

と定義すると, 次が成り立つ：$A_j{\circ}B = B{\circ}P_j$, $A_j^*{\circ}B = B{\circ}P_j^*$,

$$A_j^*U(z) = z_jU(z), \quad U{\in}B(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)), \qquad P_j^*u(x) = -\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + x_ju(x), \quad u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

多重指数 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ に対して, $A^\alpha = A_1^{\alpha_1}\cdots A_n^{\alpha_n}$ のように表すことにする. $j,k = 1,\dots,n$ に対して,

$$[A_j, A_k] = [A_j^*, A_k^*] = 0, \quad [P_j, P_k] = [P_j^*, P_k^*] = 0$$

により, A^α, $(A^*)^\alpha$, P^α, $(P^*)^\alpha$ は作用の順番によらず, $(A^*)^\alpha = (A^\alpha)^*$, $(P^*)^\alpha = (P^\alpha)^*$ が成り立つ.

$$h_0(x) = B^*\varphi_0(x) = \pi^{-n/4}e^{-x^2/2}, \quad \varphi_\alpha(z) = \frac{(A^*)^\alpha\varphi_0}{\sqrt{2^{|\alpha|}\alpha!}}$$

であるから,

$$h_\alpha(x) = \frac{B^* \circ (A^*)^\alpha \circ B h_0}{\sqrt{2^{|\alpha|}\alpha!}} = \frac{(P^*)^\alpha h_0}{\sqrt{2^{|\alpha|}\alpha!}} = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\pi^{n/4}\sqrt{2^{|\alpha|}\alpha!}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right)^\alpha e^{-x^2/2}$$

である. 任意の $u(t) \in C^1(\mathbb{R})$ に対して,

$$\frac{du}{dt}(t) - tu(t) = e^{t^2/2}\frac{d}{dt}\big(e^{-t^2/2}u(t)\big)$$

に注意すると次を得る：

定理 4. $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ は, $L^2(\mathbb{R}^n)$ の完全正規直交系で,

$$h_\alpha(x) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\pi^{n/4}\sqrt{2^{|\alpha|}\alpha!}} e^{x^2/2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e^{-x^2}$$

で与えられる. また,

$$\begin{aligned} H_\alpha(x) &= \pi^{n/4}\sqrt{2^{|\alpha|}\alpha!}e^{x^2/2}h_\alpha(x) \\ &= (-1)^{|\alpha|}e^{x^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha e^{-x^2} \\ &= \sum_{\beta\leqslant[\alpha/2]}(-1)^{|\beta|}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-2\beta)!}(2x)^{\alpha-2\beta} \end{aligned}$$

は, α-次の *Hermite* 多項式よばれる $|\alpha|$-次多項式である. ここに, $[\alpha/2] = ([\alpha_1/2], \ldots, [\alpha_n/2])$ で, $t \in \mathbb{R}$ に対して $[t]$ は t を超えない最大の整数を表す.

さて, $L^2(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))$ の完全正規直交系 $\{e^{imt}/\sqrt{2\pi}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ は, $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ 上の微分作用素 $-d^2/dt^2$ の固有値 m^2 の固有関数であった. h_α は量子化された調和振動子のハミルトニアン

$$H = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + x^2 = \sum_{j=1}^n\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2\right)$$

の固有関数である.

定理 5. $Hh_\alpha = (2|\alpha|+1)h_\alpha$.

証明. $\tilde{h}_\alpha = \sqrt{2^{|\alpha|}\alpha!}h_\alpha = (P^*)^\alpha h_0$ とおくと, $H = P^*P + 1$ であるから, 定理 3により,

$$\begin{aligned} H\tilde{h}_\alpha &= B^* \circ B \circ P^*P(P^*)^\alpha h_0 + \tilde{h}_\alpha \\ &= B^* \circ A^*AA^{*\alpha}\varphi_0 + \tilde{h}_\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n B^* \circ A_j^*A_jA^{*\alpha}\varphi_0 + \tilde{h}_\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n 2\alpha_j B^*\varphi_\alpha + \tilde{h}_\alpha = (2|\alpha|+1)\tilde{h}_\alpha \end{aligned}$$

となることがわかる. □

よく知られているように, α-次の Hermite 多項式は, α-次の Hermite の微分方程式

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-2x_j\frac{\partial}{\partial x_j}+2\alpha_j\right)u=0$$

の多項式の解である. また, Simon [Si] は, Hermite 関数系 $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$ による Fourier 級数展開

$$f=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\langle f,h_\alpha\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}h_\alpha \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^n), \quad f\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

を発展させて, $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ の特徴付けを与えている.

3 Segal-Bargmann 空間上の Weyl 量子化

Bargmann 変換 B は複素数値相関数 $\phi(z,x)=i(z^2/4-zx+x^2/2)$ をもつ $\mathbb{R}^n$ 上の大域的 Fourier 積分作用素で, 正準変換

$$\kappa_B:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\ni(x,\xi)\longmapsto\kappa_B(x,\xi)=\left(x-i\xi,\frac{(x+i\xi)}{2i}\right)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$$

に付随している. そこで, $\theta(z)=\bar{z}/2i$, $\Lambda=\kappa_B(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ とおくと, $\Lambda=\{(z,\theta(z))\mid z\in\mathbb{C}^n\}$ である.

$z\in\mathbb{C}^n$ を固定して,

$$\Gamma(z)=\left\{\left(\zeta,\theta\left(\frac{z+\zeta}{2}\right)\right)\;\middle|\;\zeta\in\mathbb{C}^n\right\}$$

とおく. $\Gamma(z)$ の体積要素を,

$$d\Omega=d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n\wedge d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_n, \quad (\zeta,\theta)\in\Lambda(z)$$

とする. $\mathscr{F}_n$ における再生公式 (2) は, $\Gamma(z)$ 上の微分形式の積分

$$U(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\Gamma(z)}e^{i(z-\zeta)\theta}U(\zeta)d\Omega \tag{3}$$

によっても表すことができる.

$\mathscr{A}(\mathbb{R}^{2n})$ を $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級関数 $a(x,\xi)$ で, ある $m\geqslant 0$ が存在して,

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha+\beta|}a}{\partial x^\beta\partial\xi^\alpha}(x,\xi)\right|\leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\xi|)^m, \quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$$

が成り立つものの全体とする. $a(x,\xi)\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^{2n})$ の Weyl 量子化 $\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}(a)$ は,

$$\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}(a)u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}e^{i(x-y)\xi}a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)dyd\xi, \quad u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

によって与えられる. さらに, $\mathscr{A}(\Lambda)$ を

$$\mathscr{A}(\Lambda)=\left\{a:\Lambda\ni(z,\theta)\mapsto a(z,\theta)\in\mathbb{C}\mid a\circ\kappa_B\in\mathscr{A}(\mathbb{R}^{2n})\right\}$$

と定義する. $a(z,\theta)\in\mathscr{A}(\Lambda)$ の Weyl 量子化 $\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}(a)$ を,

$$\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}(a)U(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\Gamma(z)}e^{i(z-\zeta)\theta}a\left(\frac{z+\zeta}{2},\theta\right)U(\zeta)d\Omega,\quad U\in B(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$$

によって定義する.

$$P=2i\,\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}\left(\frac{x+i\xi}{2i}\right),\quad P^*=\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}(x-i\xi),\quad A=2i\,\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}(\theta),\quad A^*=\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}(z)$$

であるから, 定理 3 は

$$\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}\big((z,\theta)\big)\circ Bu=B\circ\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}\big(\kappa_B(x,\xi)\big)u,\quad u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

と表すことができる. これは, 次のように一般化されて, $\mathbb{R}^{2n}$ 上の Weyl 量子化と Λ 上の Weyl 量子化は, B を仲介することにより同じものであることがわかる.

定理 6. $a(z,\theta)\in\mathscr{A}(\Lambda)$ とする. このとき, 次が成り立つ：

$$\mathrm{Op}^{W}(a)\circ Bu=B\circ\mathrm{Op}^{W}(a\circ\kappa_B)u,\quad u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

証明. 作用素の超関数核を表す積分を, 正準変換によって変数変換することによる. □

4 Segal-Bargmann 空間上の Berezin-Toeplitz 作用素

関数 $b(z,\bar{z})$ を表象とする $\mathscr{F}_n$ 上の Berezin-Toeplitz 作用素 T_b を,

$$T_bU(z)=B\circ B^*(bU)(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{C}^n}e^{z\bar{\zeta}/2}b(\zeta,\bar{\zeta})U(\zeta)e^{-|\zeta|^2/2}L(d\zeta),\quad U\in\mathscr{F}_n$$

によって定義する. さて, $t\in[0,1]$ をパラメータとして, 熱方程式

$$b_t-\Delta b=0,\quad \Delta=2\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{z}}=2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial\bar{z}_j}$$

の初期値問題の解作用素 $e^{t\Delta}$ は,

$$e^{t\Delta}b(z,\bar{z})=\frac{1}{(2\pi t)^n}\int_{\mathbb{C}^n}e^{-|z-\zeta|^2/2t}b(\zeta,\bar{\zeta})L(d\zeta),$$

によって与えられる. Berezin-Toeplitz 作用素 T_b は, $e^{\Delta}|b|^2$ が各点で有限確定値をとるならば, 任意の $U\in\mathscr{F}_n$ に対して $T_bU(z)$ が各点で有限確定値をとるが, 一般には T_b は非有界作用素になる.

Guillemin [Gu] は, Berezin-Toeplitz 作用素が, Λ 上の Weyl 量子化であることを発見した：

定理 7. $b(z,\bar{z})$ に対して, $a(z,\theta)=\big(e^{\Delta/2}b\big)(z,2i\theta)$ とおくと, $T_b=\mathrm{Op}^{W}(a)$ が成り立つ.
$p(x,\xi)=\big(e^{\Delta/2}b\big)(x-i\xi,x+i\xi)$ とおくと, 定理 6により, $T_b\circ B=B\circ\mathrm{Op}^{W}(p)$ が成り立つ.

さて, 有界関数 $b(z,\bar{z})$ をとる. 任意の $U,V\in\mathscr{F}_n$ に対して, $bU-T_bU\in\mathscr{F}_n^{\perp}$ であるから,

$$\langle T_bU,V\rangle_{\mathscr{F}_n}=\langle bU,V\rangle_{L^2\left(\mathbb{C}^n;e^{-|z|^2/2}L(dz)\right)}$$

となることに注意する. $E\subset\mathbb{C}^n$ を点 $z_0=x_0-i\xi_0$ の小さい近傍とし, χ_E を E の特性関数とする. Daubechies [D] は, 時間周波数解析への応用を念頭において, $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ の (x_0,ξ_0) の近傍への超局所化 $\chi_E(z)e^{-|z|^2/4}Bu(z)$ を考察した. Daubechies の局所化作用素 D_E を,

$$\langle D_Eu,v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\langle\chi_Ee^{-|\cdot|^2/4}Bu,e^{-|\cdot|^2/4}Bv\rangle_{L^2(\mathbb{C}^n)},\quad u,v\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

と定義する.

$$\langle\chi_Ee^{-|\cdot|^2/4}Bu,e^{-|\cdot|^2/4}Bv\rangle_{L^2(\mathbb{C}^n)}=\langle\chi_EBu,Bv\rangle_{L^2\left(\mathbb{C}^n;e^{-|z|^2/2}L(dz)\right)}=\langle T_{\chi_E}\circ Bu,Bv\rangle_{\mathscr{F}_n}$$

であるから, Daubechies の超局所化作用素 D_E は, $D_E=B^*\circ T_{\chi_E}\circ B$ と表される. よって, 定理 6 により, Daubechies の局所化作用素 D_E は

$$D_E=\mathrm{Op}^{\mathrm{W}}(p_E),\quad p_E(x,\xi)=\left(e^{\Delta/2}\chi_E\right)(x-i\xi,x+i\xi)=\frac{1}{\pi^n}\iint_{E'}e^{-(x-y)^2-(\xi-\eta)^2}dyd\eta,$$

$E'=\{(x,\xi)\mid x-i\xi\in E\}$ によって与えられる. すなわち, $\chi_{E'}(x,\xi)$ の反 Wick 量子化である.

Bargmann 変換 B を定義する積分の $e^{-(z^2/4-zx+x^2/2)}$ を, ある種の x の急減少関数関数に一般化したものは窓関数とよばれ, そのとき積分変換は窓 Fourier 変換とか短時間 Fourier 変換とよばれる. これをもとにした超局所解析が時間周波数解析であり, 数学的な基礎研究から, 通信理論・信号処理・画像処理等への応用に至るまで, 様々な研究が盛んに行われている. [Gr] を参照のこと. 時間周波数解析では, 複素解析学を利用することをあきらめる代わりに, 超局所化する積分変換を B のような Fourier 積分作用素の形になっていることにとらわれずに自由な窓関数を選ぶことができるという特徴がある.

5　メキシコ帽子のウェーブレット変換

本節では $n=1$ とする. $-(e^{-x^2/2})''$ の正規化

$$\psi_{\mathrm{MEX}}(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/3}(1-x^2)e^{-x^2/2}$$

は, メキシコ帽子ウェーブレット (Mexican hat wavelet) とよばれる. $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ をウェーブレットとする $u\in L^2(\mathbb{R})$ のウェーブレット変換を

$$W_\psi u(x,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}}\overline{\psi\left(\frac{y-x}{a}\right)}u(y)dy,\quad a>0$$

によって定義する. $\psi=\psi_{\mathrm{MEX}}$ のとき, $W_\psi=W_{\mathrm{MEX}}$ と書くことにする.

$h>0$ を準古典パラメータ (semiclassical parameter) とする.

$$Bu(z,h)=2^{-1/2}(\pi h)^{-3/4}\int_{\mathbb{R}}e^{-(z^2/4-zy+y^2/2)/h}u(y)dy,$$
$$Tu(x,\xi,h)=e^{-|x-i\xi|^2/2h}Bu(x-i\xi,h)$$

$$= 2^{-1/2}(\pi h)^{-3/4} e^{-\xi^2/2h} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi-y)^2/2h} u(y)dy$$
$$= 2^{-1/2}(\pi h)^{-3/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-y)\xi/h-(x-y)^2/2h} u(y)dy$$

とする. $Tu(x,\xi,h)$ は u の FBI (Fourier-Bros-Iagolnitzer) 変換とよばれる.

$$W_{\mathrm{MEX}}[u](x,a) = 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} a^3 T[-u''](x,0,a^2)$$

である.

[M] にあるように, $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ が $h > 0$ に依存しないとき, u の解析的波面集合 $\mathrm{WF}_A[u]$, Gevrey-s 級波面集合 $\mathrm{WF}_s[u]$ ($s > 1$), 波面集合 $\mathrm{WF}[u]$ は, それぞれ以下のように特徴付けられる. $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ とする.

$$(x_0,\xi_0) \notin \mathrm{WF}_A[u] \iff Tu(x,\xi,h) = \mathcal{O}(e^{-\delta/h}) \quad \text{near} \quad (x_0,\xi_0) \quad \text{as} \quad h \downarrow 0,$$
$$(x_0,\xi_0) \notin \mathrm{WF}_s[u] \iff Tu(x,\xi,h) = \mathcal{O}(e^{-\delta/h^{1/s}}) \quad \text{near} \quad (x_0,\xi_0) \quad \text{as} \quad h \downarrow 0,$$
$$(x_0,\xi_0) \notin \mathrm{WF}[u] \iff Tu(x,\xi,h) = \mathcal{O}(h^{\infty}) \quad \text{near} \quad (x_0,\xi_0) \quad \text{as} \quad h \downarrow 0.$$

$e^{\xi^2/h} Tu(x,\xi,h)$ は $z = x - i\xi \in \mathbb{C}$ の正則関数であるから,

$$Tu(x,\xi,h) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\xi^2/h} \frac{(-i\xi)^k}{k!} \frac{\partial^k Tu}{\partial x^k}(x,0,h)$$

と表される. $Tu(x_0,0,h) = \mathcal{O}(r)$ ならば, $(x_0,0)$ の小さい近傍で $Tu(x,\xi,h) = \mathcal{O}(r)$ であるから, Cauchy の積分公式により, ある $M > 0$, $\rho > 0$ が存在して

$$\left| \frac{\partial^k Tu}{\partial x^k}(x,0,h) \right| \leqslant Mr\rho^{-k} k! \quad \text{near} \quad x = x_0$$

である. よって, $Tu(x,0,h)$ の評価からは, u の波面集合はよく見えないが, u の特異台がはっきり見えることがわかる. u の C^{ω} 級, Gevrey-s 級, C^{∞} 級の意味での特異台を, それぞれ $\mathrm{singsupp}_A[u]$, $\mathrm{singsupp}_s[u]$, $\mathrm{singsupp}[u]$ と表すことにする. $-d^2/dx^2$ は楕円型微分作用素であるから,

$$\mathrm{singsupp}_A[u] = \mathrm{singsupp}_A[-u''], \ \ \mathrm{singsupp}_s[u] = \mathrm{singsupp}_s[-u''], \ \ \mathrm{singsupp}[u] = \mathrm{singsupp}[-u'']$$

である. よって次を得る：

定理 8. $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ の特異台は以下のように特徴づけられる：

$$x_0 \notin \mathrm{singsupp}_A[u] \iff W_{\mathit{MEX}}[u](x,a) = \mathcal{O}(e^{-\delta/a^2}) \quad \textit{near} \quad x_0 \quad \textit{as} \quad a \downarrow 0,$$
$$x_0 \notin \mathrm{singsupp}_s[u] \iff W_{\mathit{MEX}}[u](x,a) = \mathcal{O}(e^{-\delta/a^{2/s}}) \quad \textit{near} \quad x_0 \quad \textit{as} \quad a \downarrow 0,$$
$$x_0 \notin \mathrm{singsupp}[u] \iff W_{\mathit{MEX}}[u](x,a) = \mathcal{O}(a^{\infty}) \quad \textit{near} \quad x_0 \quad \textit{as} \quad a \downarrow 0.$$

参考文献

[D] Daubechies, I.: *Time-frequency localization operators: a geometric phase space approach*, IEEE Trans. Inform. Theory **34** (1988), 605–612.

[F] Folland, G. B.: “Harmonic Analysis in Phase Space”, Princeton University Press, 1989.

[Gr] Gröchenig, K.: “Foundations of Time-Frequency Analysis”, Birkhäuser, 2001.

[Gu] Guillemin, V.: *Toeplitz operators in n dimensions*, Integral Equations Operator Theory **7** (1984), pp.145–205.

[M] Martinez, A.: “An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis”, Springer, 2002.

[Si] Simon, B.: *Distributions and their Hermite expansions* J. Math. Phys. **12** (1971), pp.140–148.

[Sj] Sjöstrand, J.: *Function spaces associated to Global I-Lagrangian manifolds*, Structure of solutions of differential equations (Katata/Kyoto, 1995), pp.369–423, World Sci. Publ., 1996.