フレドホルムの積分方程式論

千原浩之　　2020 年 7 月 3 日（金）　Ver.1

1 序

本稿は溝畑茂の積分方程式論への入門書 [4] を教科書にしてフレドホルムの積分方程式論について学習した記録である. 別の言い方をすると, 一般向けの拙稿 [2] の内容をより具体的に詳述したものである. ルベーグ積分論を基盤とした関数空間等の近代的な道具を一切使うことなく, 微分積分学と線形代数学だけを駆使して学習した記録であり, その範囲で扱うことのできる話題に限って詳細を述べる. 特に, 有界閉区間上の連続関数列の一様収束と冪級数の基礎を最も基本的かつ重要な解析学の手法としている. 本節ではフレドホルムの積分方程式論の概要と歴史を紹介する. 本稿全体を通じて関数や行列や数ベクトルなどはすべて複素数値とする. 本稿で考察する「第二種フレドホルム型積分方程式」とよばれる積分方程式を導入する. 簡単のため, 有界閉区間 $[0,1]$ 上で考える. $C[0,1]$ および $C\bigl([0,1]\times[0,1]\bigr)$ はそれぞれ有界閉区間 $[0,1]$ および正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上の複素数値連続関数の全体とする. $K(x,y)\in C\bigl([0,1]\times[0,1]\bigr)$, $f(x)\in C[0,1]$ を与えられた関数とし, $\lambda\in\mathbb{C}$ をパラメータとする. 未知関数 $\varphi(x)$ に対する積分方程式

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy=f(x),\quad x\in[0,1] \tag{1}$$

を第二種フレドホルム型積分方程式という. $K(x,y)$ は積分核とよばれる. 左辺第 2 項を移行して $\varphi(x)=\cdots$ の形で見ることにより, $\varphi(x)\in C[0,1]$ を捜すのが自然であることがわかる. 他に, 第一種フレドホルム型積分方程式, 第三種フレドホルム型積分方程式, さらに, ヴォルテラ型積分方程式とよばれる類似の方程式があるが, ここでは述べないことにする. 例えば, 文献の [4] や [6] に紹介されている.

フレドホルム (Ivar Fredholm, 1866-1927) はスウェーデン人で, 数理物理学の具体的問題の解法を主に研究していた研究者であり, 現代風に言えば数学者兼物理学者と言ってよいであろう. 彼の研究対象は極めて具体的であったにもかかわらず, 研究成果は, ある種の偏微分作用素に対する基本解の構成, 積分方程式論, など純粋数学の発展に大きな影響を与えたものが多い.

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の領域 Ω で調和で, かつ, 境界 $\partial\Omega$ で指定された関数 f に一致する関数 $u(x,y)$ を見つける問題,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Omega,$$
$$u(x,y)=f(x,y),\quad (x,y)\in\partial\Omega,$$

はディリクレ問題とよばれるが, 19 世紀には, リーマン, エルナン・シュワルツ, カール・ノイマン, ポアンカレらにより盛んに研究されていた. また, 2 次元だけでなく 3 次元の同様の問題も盛んに考察されていたが, 現在のように一般の n 次元で統一的に考察するのではなく, 当時は 2 次元の問題と 3 次元の問題は全く別の問題であるとみなされていたようである. Ω が具体的な場合にはポアソン積分とよばれる境界値 f の積分変換により, ディリクレ問題の解 u が具体的に与えられることがある. 2 つの例を挙げるが, メビウス変換により本質的には全く同じものである.

例 1（Ω が単位円板の場合）. $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ のとき, $f(\theta)\in C[0,2\pi]$ に対するディリクレ問題の解は次で与えられる：

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-x^2-y^2}{1-2x\cos t-2y\sin t+x^2+y^2}f(t)dt,\quad x^2+y^2<1.$$

例 2（Ω が上半平面の場合）． $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ のとき, $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数 $f(x)$ に対するディリクレ問題の解は次で与えられる：

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f(t)dt, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty). \tag{2}$$

フレドホルムは (2) の境界付近での挙動に着目して, 有界領域のディリクレ問題を (1) の $\lambda = -1$ の形の場合に帰着させるという新しい着想を得た：

$$\varphi(x) + \int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in [0,1].$$

このとき x, y はそれぞれ有界領域 Ω を囲む曲線の弧長パラメータであり, 積分核は曲線の曲率から定まる関数であり, $f(x)$ はディリクレ問題の指定された境界値である. フレドホルムは, 1900 年の数年前にこれをきっかけにして (1) の解法の研究をはじめ, 全く新しい画期的理論を創り出すことに成功した. それが 1903 年に出版された学術論文 [1] である. 出版前の 1901 年にホルムグレンがゲッチンゲン大学にてフレドホルムの積分方程式論を紹介したことにより, ヒルベルトをはじめとする当時の数学者の強い関心をよび, それから 20-30 年くらいの間, 積分方程式論は数学の主要な分野の 1 つであった.

フレドホルムの積分方程式論とはどのようなものであろうか? 一言で言えば, 未知数と方程式の個数が同じ連立 1 次方程式の解の存在や解の全体の構造に関する理論を, 有限次元の複素数ベクトル空間から, 無限次元の複素ベクトル空間である $C[0,1]$ へ無限次元化したものと言うことができる. $m = 1, 2, 3, \ldots$ を複素数ベクトル空間の次元とし, 複素数を成分とする m 次正方行列の全体を $M_m(\mathbb{C})$ とする. $A \in M(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, $\lambda \in \mathbb{C}$ をそれぞれ与えられた複素正方行列, 複素数ベクトル, 複素数パラメータとし, E を m 次単位行列とする. 未知の複素数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ に対する連立 1 次方程式

$$(E - \lambda A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{in} \quad \mathbb{C}^m \tag{3}$$

を考える. $\boldsymbol{x} - \lambda A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と見ることもできることに注意する.

$$\mathbb{C}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m, \quad C[0,1] \ni \varphi(x) \mapsto \int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy \in C[0,1]$$

はそれぞれ同じベクトル空間の間の 1 次変換であるから, (1) と (3) とは全く同じ形式の方程式であることがわかる. $x \in [0,1]$ を成分の番号であると解釈すると, (1) は非可算無限個の成分をもつ数ベクトルに対する非可算無限個の連立 1 次方程式と見ることができる. (3) の解の存在・非存在については大まかには以下の通りである：

- $\det(E - \lambda A) \neq 0$ ならば, (3) の解はただひとつ存在して $(E - \lambda A)^{-1}\boldsymbol{b}$ で与えられる.
- $\det(E - \lambda A) \neq 0$ のとき, $\mathrm{rank}\big([E - \lambda A, \boldsymbol{b}]\big) = \mathrm{rank}(E - \lambda A)$ ならば, (3) の解は無数に存在する.
- $\det(E - \lambda A) \neq 0$ のとき, $\mathrm{rank}\big([E - \lambda A, \boldsymbol{b}]\big) \neq \mathrm{rank}(E - \lambda A)$ ならば, (3) の解は存在しない.

フレドホルムの積分方程式論を一言で述べるとすると以下のようになる.

フレドホルムの積分方程式論の要点. 非可算無限次元の連立 1 次方程式ともいうべき積分方程式 (1) の解の存在・非存在, および, 存在する場合の解の構造について, 有限次元の連立 1 次方程式 (3) と全く同様のことが成立する.

さて, フレドホルムの積分方程式論は, 極めて具体的な内容の数学理論であるが, ヒルベルト空間, 有界線形作用素, 完全連続作用素, スペクトル, レゾルベントなどの抽象的な概念を生み出すきっかけになり, 無限次元の線形代数学とも言うべき現在でいうところの関数解析学という分野を生み出すのに著しい貢献をした.

本稿はフレドホルムの積分方程式論を微分積分学と線形代数学だけを駆使してできる範囲で解説することを目的とする. 別の言い方をすると, フレドホルムの交代定理とよばれるヒルベルト空間からそれ自身への完全連続作用素に関する抽象的な定理がよく知られているが, 本稿は, その完全に抽象化された理論の一部を, 第二種フレドホルムの積分方程式という具体例を題材にして, 初等的な微分積分学と線形代数学の範疇で扱える部分だけを紹介する. 2 節では連立 1 次方程式 (3) について, フレドホルムの積分方程式論と比較しやすいように再構築した理論を述べる. 3 節では連続関数列の一様収束と冪級数の基礎について本稿で必要なことのみ確認する. 4 節では λ が十分小さいときには, (3) の解が一意的に存在すること, および, 解がノイマン級数によって具体的に与えられることを述べる. 5 節ではフレドホルムの積分方程式 (1) において, 連立 1 次方程式 (3) の係数行列の行列式 $\det(E-\lambda A)$ に相当するフレドホルム行列式 $D(\lambda)$ を定義する. 6 節では $D(\lambda) \neq 0$ のときの (3) の解が一意的に存在すること, および, 連立 1 次方程式 (3) の係数行列の逆行列 $(E-\lambda A)^{-1}$ に相当するレゾルベントについて述べる. ここまでは, 微分積分学と線形代数学だけで解説することが可能である. 7 節では $D(\lambda)=0$ の場合の解が存在するための必要十分条件について, 連立 1 次方程式の場合と対比しながら結果だけを述べる.

2　連立 1 次方程式

$A \in M(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$, $\lambda \in \mathbb{C}$ をそれぞれ与えられた複素正方行列, 複素数ベクトル, 複素数パラメータとし, E を m 次単位行列とする. 未知の複素数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ に対する連立 1 次方程式 (3) の解の存在・非存在の条件, および, 解が存在する場合の解の表現や構造などについて, フレドホルムの積分方程式論と比べやすい形に再構成する. 具体的には以下を述べる.

- $E - \lambda A$ が正則行列ならば, (3) の解は一意的に存在して $(E - \lambda A)^{-1}\boldsymbol{b}$ で与えられることはよく知られているが, ここでは λ が十分小さいとき $E - \lambda A$ は正則行列で $(E - \lambda A)^{-1}$ はノイマン級数で与えられることを紹介する.

- $E - \lambda A$ が正則行列でないとき, (3) の解が存在するための必要十分条件を, ${}^t(E - \lambda A) = E - \lambda {}^t A$ が $\mathbb{C}^m$ の標準基底に対して表す線形変換の核, すなわち, ${}^t A$ の固有値 $1/\lambda$ に対する固有空間を使って特徴づける.

さらに, アダマールの評価式とよばれる行列式の絶対値評価を与える. これは, フレドホルム行列式が存在して複素平面上の整関数になることを証明するのに本質的役割を果たす.

$\det(E - \lambda A)$ は λ の m 次多項式であるから, $\lambda \in \mathbb{C}$ の連続関数であり, $\lambda = 0$ のとき 1 であるから, 十分小さい λ に対して $\det(E - \lambda A)$ は正則行列になる. 十分小さい λ に対して $(E - \lambda A)^{-1}$ はノイマン級数という λA のすべての冪を足し合わせた級数で与えられる.

定理 1. $A = [a_{ij}] \in M_m(\mathbb{C})$, $a := \max|a_{ij}|$, $A^0 = E$ とする.
$|\lambda| < 1/ma$ ならば $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p A^p$ の各成分は絶対収束し $(E - \lambda A)^{-1}$ に等しい.

ここで等比級数の和の公式を思い出そう. $\alpha \in \mathbb{C}$ が $|\alpha| < 1$ であるとき,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \alpha^p = \frac{1}{1 - \alpha}$$

である. これは, $(1 -$ 小さい数$)$ の逆数は, 「小さい数」の冪をすべて足し合わせたものに等しいと解釈することもできる. 定理 1 は正方行列でも同様のことが成立することを述べている.

定理 1 の証明. $B = [b_{ij}] \in M_m(\mathbb{C})$, $b = \max|b_{ij}|$ とする. AB の (i,j)-成分の絶対値は

$$\left|\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right| \leqq \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}||b_{kj}| \leqq \sum_{k=1}^{m} ab = mab \leqq m^2 ab$$

によって評価される. よって, A^p の各成分は $(ma)^p$ によって評価される. したがって $|\lambda| < 1/ma$ のとき

$$\sum_{p=0}^{\infty} |\lambda^p A^p \text{ の } (i,j)\text{-成分}| \leqq \sum_{p=0}^{\infty} (|\lambda| ma)^p = \frac{1}{1 - |\lambda| ma} < \infty$$

である. よって, 級数の各成分は収束し,

$$(E - \lambda A) \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p A^p = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p A^p - \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p A^p = \lambda^0 A^0 = E$$

となるので, 級数は $(E - \lambda A)^{-1}$ に等しいことがわかる. □

さて, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考えることにして, この解が存在するための必要十分条件を述べる. $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m]$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{C}^m$ とする.

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle := \{\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a}_m \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}\},$$
$$\mathrm{Ker}({}^t A) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m \mid {}^t \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$$

とする. $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_m), \boldsymbol{y} = {}^t(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{C}^m$ に対して, エルミート内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{\mathbb{C}^m}$ と対称双 1 次次形式 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_{\mathbb{C}^m}$ を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{\mathbb{C}^m} := {}^t \boldsymbol{x} \overline{\boldsymbol{y}} = x_1 \overline{y_1} + x_m \overline{y_m},$$
$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_{\mathbb{C}^m} := {}^t \boldsymbol{x} \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m$$

と定義する. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{\mathbb{C}^m} = \langle \boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{y}} \rangle_{\mathbb{C}^m}$ であることに注意する. $S \subset \mathbb{C}^m$ のエルミート内積に関する直交補空間を $S^\perp$ と表す. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するための必要十分条件を述べる.

定理 2. 次の (I)-(V) は互いに同値である.

(I) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する.

(II) $\mathrm{rank}\big([A, \boldsymbol{b}]\big) = \mathrm{rank}(A)$ が成立する.

(III) $\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ が成立する.

(IV) $\boldsymbol{b} \in \big(\mathrm{Ker}(A^*)\big)^\perp$ が成立する.

(V) すべての $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}({}^t A)$ に対して, $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle_{\mathbb{C}^m} = 0$ が成立する.

証明. (I) と (II) と (III) が互いに同値であることは, ほぼすべての線形代数学の教科書で解説されているであろう. 例えば [5] では定理が述べられ証明が与えられている. 一方, ${}^t A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ であることと $A^* \overline{y} = \boldsymbol{0}$ であることは同値なので, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}({}^t A)$ であることと, $\overline{\boldsymbol{y}} \in \mathrm{Ker}(A^*)$ であることは同値であり, このことから (IV) と (V) は同値である. さて, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(A^*)$ ならば, ${}^t A\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$ であるが,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = {}^t A \overline{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} {}^t \boldsymbol{a}_1 \overline{\boldsymbol{y}} \\ \vdots \\ {}^t \boldsymbol{a}_m \overline{\boldsymbol{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{y})_{\mathbb{C}^m} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{y})_{\mathbb{C}^m} \end{bmatrix}$$

であるから, $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle \subset \big(\mathrm{Ker}(A^*)\big)^\perp$ である. これらはともに $\mathbb{C}^m$ の部分ベクトル空間であり, ともに次元は $\mathrm{rank}(A)$ に一致するから $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle = \big(\mathrm{Ker}(A^*)\big)^\perp$ であることがわかる. これにより (III) と (IV) が同値であることがしたがう. 以上により, (I)-(V) は互いに同値であることが確かめられた. □

フレドホルム行列式を定義する冪級数の収束を証明するのに本質的役割を演ずるアダマールの不等式を確認して本節を終わることにする.

補題 3. $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m] \in M_m(\mathbb{C})$ に対して次が成立する：

$$|\det(A)|^2 \leqq \prod_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{a}_i\|_{\mathbb{C}^m}^2. \tag{4}$$

ここに, $\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{C}^m} = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_{\mathbb{C}^m}}$ である.

これを証明するために, まず次を証明する.

補題 4. $B = [b_{ij}] = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m] \in M_m(\mathbb{C})$ はエルミート行列ですべての固有値が非負であるとする. このとき, 次が成立する：

$$\det(B) \leqq \prod_{i=1}^{m} b_{ii}. \tag{5}$$

証明. 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}B\overline{\boldsymbol{x}} \geqq 0$ であるから, 標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ に対して

$$0 \leqq {}^t\boldsymbol{e}_i B \boldsymbol{e}_i = {}^t\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{b}_i = b_{ii}$$

であり, 対角成分はすべて非負であることがわかる. ある固有値が 0 であるとき,

$$\det(B) = 0 \leqq \prod_{i=1} b_{ii}$$

が成立する. すべての固有値が正のときは, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}B\overline{\boldsymbol{x}} > 00$ であるから, 対角成分はすべて正である. このとき, 対角行列 D を

$$D = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{b_{11}}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{b_{mm}}}\right)$$

とすると, DBD の対角成分はすべて 1 になる. よって, 相加平均と相乗平均の関係

$$\frac{t_1 + \cdots + t_m}{m} \geqq (t_1 \cdots t_m)^{1/m}, \quad t_1, \ldots, t_m \geqq 0$$

を DBD の固有値に対して用いると

$$\frac{\det B}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m} b_{ii}} = \det(DBD) \leqq \left(\frac{\operatorname{tr}(DBD)}{m}\right)^m = 1$$

となるから, (5) が得られる. □

補題 3 の証明. ${}^tA\overline{A} = [(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)]$ は固有値がすべて非負のエルミート行列であるから, 補題 4 により

$$|\det(A)|^2 = \det({}^tA\overline{A}) \leqq \prod_{i=1}^{m} (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = \prod_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{a}_i\|_{\mathbb{C}^m}^2$$

となって, (4) が得られる. □

3 関数列の一様収束

関数列および関数項級数の一様収束, 冪級数について本稿で用いる事実をまとめておく. 数多くの参考書が存在するが, 例えば, [3] は参考になることが多い.

定義 5. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間とする.

- $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ が与えられているとする. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を区間 $[a, b]$ 上の関数列という.
- 任意の $x_0 \in I$ を固定するごとに, 数列 $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であるとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各点収束するといい, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $(x \in [a, b])$ を極限関数という.
- ある $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が存在して,
$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to 0) \tag{6}$$
が成り立つとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に $[a, b]$ 上で一様収束するという.

$\mathbb{N}$ を正整数の全体とする. (6) をより具体的に書き表すと次のようになる：

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N(\varepsilon)$ ならば, すべての $x \in [a, b]$ に対して, $f(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ が成り立つ.

関数列の一様収束はいくつかのよい性質をもっているが, 本稿で必要なのは次である.

定理 6. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a, b]$ が $[a, b]$ 上で f に一様収束するならば, $f \in C[a, b]$ であり,
$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx,$$
すなわち, 極限と積分の順序交換が成立する.

証明. まず $x_0 \in [a, b]$ を固定して, f が x_0 で連続であることを示す. 仮定を数式で表そう.

- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a, b]$ が $[a, b]$ 上で f に一様収束する：
任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N(\varepsilon)$ ならば, $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ がすべての $t \in [a, b]$ で成立する.
- $f_\varepsilon(x) := f_{N(\varepsilon)+1}(x)$ は x_0 で連続である：
任意の $\eta > 0$ に対して, ある $\delta(\eta, \varepsilon) > 0$ が存在して, $|x - x_0| < \delta(\eta, \varepsilon)$ ならば, $|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x_0)| < \eta$ が成立する.

特に $\varepsilon = \eta$ の場合を考える. $|x - x_0| < \delta(\varepsilon, \varepsilon)$ のとき, $n = N(\varepsilon) + 1, t = x, x_0$ として一様収束性を用いると
$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_\varepsilon(x) + f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x_0) + f_\varepsilon(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqq |f(x) - f_\varepsilon(x)| + |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x_0)| + |f_\varepsilon(x_0) - f(x_0)| \\ &< 3\varepsilon\end{aligned}$$

となって, f は x_0 で連続であることがわかる. 後半は

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &\leqq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\leqq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \\ &\to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

により明らかである. □

本稿では, 連続関数の関数項級数を扱うことが多い.

定義 7. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間とする.

- $f_p : [a,b] \to \mathbb{C}, p = 0, 1, 2, \ldots$ が与えられているとする. 形式和 $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} f_p(x)$ を $[a,b]$ 上の関数項級数という.
- 部分和のなす関数列 $\displaystyle\left\{\sum_{p=0}^{n} f_p(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ が各点収束 (あるいは一様収束) するとき, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} f_p(x)$ は各点収束 (あるいは一様収束) するという.
- 関数項級数 $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}|f_p(x)|$ が一様収束するとき, $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} f_p(x)$ は一様 (に) 絶対収束する, あるいは, 絶対一様収束する, などという.

絶対収束級数は収束級数であるから, 一様に絶対収束する関数項級数は一様収束する. 与えられた級数が一様収束級数であることを確認するのに, 以下の定理は粗く見えるが実用上は有効であることが非常に多い：

定理 8 (ワイエルシュトラスの優級数定理). $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} f_p(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ 上の関数項級数で, 正項級数 $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} M_p$ が存在して, $|f_p(x)| \leqq M_p$, $(x \in [a,b])$ が成り立つとする. $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} M_p < \infty$ ならば, $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} f_p(x)$ は $[a,b]$ 上で一様に絶対収束する.

$\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} M_p$ は $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} f_p(x)$ に対する優級数とよばれる.

証明. 正項級数の比較原理により, 各 $x \in [a,b]$ を固定するごとに $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}|f_p(x)| < \infty$ である. これを $S(x)$ とおくと,

$$0 \leqq S(s) - \sum_{p=0}^{n}|f_p(x)| = \sum_{p=n+1}^{\infty} |f_p(x)| \leqq \sum_{p=n+1}^{\infty} M_p$$

となる. $\sum_{p=0}^{\infty} M_p < \infty$ であるから, $\sum_{p=n+1}^{\infty} M_p \to 0\,(n \to \infty)$ となるので, $\sum_{p=0}^{\infty} |f_p(x)|$ は $[a,b]$ 上で一様収束することがわかる. □

フレドホルム行列式はパラメータ $\lambda \in \mathbb{C}$ の冪級数として定義される. ここで, 冪級数に関する必要な基本的事実をまとめておく.

定義 9. 数列 $\{a_p\}_{p=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ が与えられているとする. $z \in \mathbb{C}$ を独立変数とする.
形式和 $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ を $z=0$ を中心とする冪級数という.

冪級数は収束する領域でのみ意味があり関数を表す. まず, $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ について, 次の事実に注意する.

- $z=0$ で収束する.
- ある $z_0 \neq 0$ で収束するならば, $|z| < |z_0|$ をみたす $z \in \mathbb{Z}$ に対して絶対収束する. 特に, 任意の $\varepsilon \in (0, |z_0|)$ に対して, $|z| \leqq |z_0| - \varepsilon$ で一様に絶対収束する.

  実際, $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z_0^p$ は収束級数であるから, $a_p z_0^p \to 0\,(p \to \infty)$ である. よって, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $|a_p z_0^p| \leqq 1\,(p > N)$ が成立する. $|z| \leqq |z_0| - \varepsilon$ のとき, $p > N$ に対して

  $$|a_p z^p| = |a_p z_0^p| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^p \leqq \left(\frac{|z_0| - \varepsilon}{|z_0|}\right)^p$$

  が成立する. よって,

  $$\sum_{p=0}^{N} |a_p z_0^p| + \sum_{p=N+1}^{\infty} \left(\frac{|z_0| - \varepsilon}{|z_0|}\right)^p = \sum_{p=0}^{N} |a_p z_0^p| + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{|z_0| - \varepsilon}{|z_0|}\right)^{N+1} < \infty$$

  が $|z| \leqq |z_0| - \varepsilon$ における $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ の収束優級数になる.
- ある $z_0 \neq 0$ で発散するならば, $|z| > |z_0|$ をみたすすべての $z \in \mathbb{Z}$ に対して発散する. これは, 上からただちにしたがう.

以上を踏まえて, $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ に対して

$$\rho = \sup\left\{ |z| \;\middle|\; z \in \mathbb{C},\ \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p \text{ は収束する.} \right\}$$

を $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ の収束半径という. $\rho = 0$ または $\rho \in (0, \infty)$ または $\rho = \infty$ であるが以下の通りである.

- $\rho = 0$ のとき, $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ はすべての $z \neq 0$ で発散する.

- $\rho \in (0,\infty)$ のとき, $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ は, $|z| < \rho$ をみたすすべての $z \in \mathbb{C}$ で絶対収束し, $|z| > \rho$ をみたすすべての $z \in \mathbb{C}$ で発散する. $|z| = \rho$ のときは, 収束することもあれば, 発散することもある.
- $\rho = \infty$ のとき, $\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ は, すべての $z \in \mathbb{C}$ で絶対収束する.
- $\rho \neq 0$ である冪級数を収束冪級数といい, $|z| = \rho$ の表す円を収束円という.

さて, 収束半径の判定法として次が知られている.

定理 10.

- コーシー・アダマールの判定法：

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{p\to\infty} |a_p|^{1/p}}.$$

- ダランベールの判定法： ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $p > N$ で $a_p \neq 0$ であり, $\{a_p/a_{p+1}\}$ が収束列であるならば

$$\rho = \lim_{p\to\infty} \frac{a_p}{a_{p+1}}.$$

証明は省略する. コーシー・アダマールの判定法により, 収束冪級数の収束半径と形式的に項別微分した冪級数の収束半径は等しい. さらに, 次が成立する.

定理 11. $f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ の収束半径を $\rho > 0$ とする. $f(z)$ は $|z| < \rho$ において微分可能であり,

$$\frac{df}{dz}(z) = \sum_{p=1}^{\infty} p a_p z^{p-1}$$

が成立する. さらに, $f(z)$ は $|z| < \rho$ において何回も項別微分可能であり, $a_p = f^{(p)}(0)/p!$ が成立する.

証明. 前半のみ示せば十分である. $\rho = \infty$ のときは, 任意の有限な正数を 1 つ固定して ρ と改める. $|z| < \rho$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を任意にとって固定する. $\delta > 0$ を $2\delta + |z| \leqq \rho$ をみたすようにとる. $h \in \mathbb{C}$ は $0 < |h| \leqq \delta$ をみたすものとすると, $|z+h| \leqq \rho - \delta < \rho$ がみたされる. $g(z) := \sum_{p=1}^{\infty} p a_p z^{p-1}$ とおく. $g(z)$ も収束半径 ρ の収束冪級数である.

$$I(h) := \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = h \sum_{p=0}^{\infty} a_{p+2} \sum_{q=0}^{p} \frac{(p+2)!}{(q+2)!(p-q)!} z^{p-q} h^q$$

が $h \to 0$ のとき 0 に収束することを示せばよい.

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{p+2}| \sum_{q=0}^{p} \frac{(p+2)!}{(q+2)!(p-q)!} |z^{p-q} h^q|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq \sum_{p=0}^{\infty}(p+2)(p+1)|a_{p+2}|\sum_{q=0}^{p}\frac{p!}{q!(p-q)!}|z|^{p-q}|h|^{q} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}(p+2)(p+1)|a_{p+2}|(|z|+|h|)^{p} \\
&\leqq \sum_{p=0}^{\infty}(p+2)(p+1)|a_{p+2}|(\rho-\delta)^{p}
\end{aligned}
$$

である. 右辺を冪級数と見ると収束半径は ρ であるから, 右辺は収束する正項級数である. この値を $C>0$ とおくと, $|I(h)| \leqq C|h|$ と評価されるから, $I(h) \to 0$ $(h \to 0)$ がしたがう. □

第 6節で用いる次の事実を確認する.

補題 12. $F(x) \in C[0,1]$ がすべての $g \in C[0,1]$ に対して

$$\int_0^1 F(x)g(x)dx = 0$$

をみたすならば, $F(x) \equiv 0$ である.

証明. $g(x)$ として実数値関数のみを選んで, F の実部と虚部に分けて示せばよいから, $F(x)$ と $g(x)$ は実数値関数であるとして示せば十分である.

$F(x) \not\equiv 0$ であるとせよ. 必要ならば, $-F(x)$ を考えることにして, ある $x_0 \in [0,1]$ に対して $2\delta := F(x_0) > 0$ であるとしてよい. $F(x)$ は x_0 で連続であるから, ある有界閉区間 $[a,b] \subset [0,1]$ が存在して, $x_0 \in [a,b]$ であって, $x \in [a,b]$ のとき $F(x) \geqq \delta$ が成立する.

$$
g(x) = \begin{cases}
\dfrac{4(x-a)}{b^2-a^2}, & x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right], \\
-\dfrac{4(x-b)}{b^2-a^2}, & x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right], \\
0, & x \notin [a,b],
\end{cases}
$$

とおくと $g(x) \in C[0,1]$, $g(x) \geqq 0$ である. よって, 仮定により

$$0 = \int_0^1 F(x)g(x)dx = \int_a^b F(x)g(x)dx \geqq \int_a^b \delta g(x)dx = \delta > 0$$

となって矛盾が導かれる. よって $F(x) \equiv 0$ がしたがう. □

4　複素数パラメータ λ が小さい場合

定理 1 で見たように, $\lambda \in \mathbb{C}$ が十分小さいならば, 連立 1 次方程式 (3) の解は一意的に存在して, ノイマン級数で与えられる. フレドホルムの積分方程式においても全く同様のことが成り立つことを見よう. まず, $f \in C[0,1]$ に対して $\|f\| := \max_{x\in[0,1]}|f(x)|$ とおく. 積分核の列 $\{K_p(x,y)\}_{p=1}^{\infty}$ を

$$K_1(x,y) := K(x,y), \quad K_p(x,y) := \int_0^1 K(x.t)K_{p-1}(t,y)dt \quad (p \geqq 2)$$

と定義する. また,

$$M := \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|dy$$

とする. $M = 0$ と $K(x,y) \equiv 0$ は同値であるが, このとき (1) は $\varphi(x) = f(x)$ という自明な方程式になり, 一意的な解 f が存在することがわかる. $\lambda = 0$ の場合も $\varphi(x) = f(x)$ という自明な方程式になり, 一意的な解 f が存在することがわかる. また $M = 0$ のとき $K_p(x,y) \equiv 0$ がすべての $p \in \mathbb{N}$ で成立することに注意する. 本節の主結果は以下の通りである.

定理 13. $|\lambda| < 1/M$ ならば, 任意の $f \in C[0,1]$ に対して (1) の解 $\varphi(x) \in C[0,1]$ が一意的に存在して, 次式で与えられる：

$$f(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \int_0^1 K_p(x,y)f(y)dy. \tag{7}$$

これを証明するために以下を用意する

補題 14.

$$\left|\int_0^1 K_p(x,y)f(y)dy\right| \leqq M^p\|f\|, \quad p = 1, 2, 3, \ldots . \tag{8}$$

証明. $p \in \mathbb{N}$ に関する数学的帰納法によって証明する. まず $p = 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 K_1(x,y)f(y)dy\right| &= \left|\int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right| \\ &\leqq \int_0^1 |K(x,y)||f(y)|dy \\ &\leqq \int_0^1 |K(x,y)|\|f\|dy \\ &= \|f\| \int_0^1 |K(x,y)|dy \\ &\leqq M\|f\|\end{aligned}$$

となって (8) が成立する.

ある $p \in \mathbb{N}$ で (8) が成立するとせよ. $p+1$ の場合も

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 K_{p+1}(x,y)f(y)dy\right| &= \left|\int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,t)K_p(t,y)dt\right) f(y)dy\right| \\ &= \left|\int_0^1 K(x,t) \left(\int_0^1 K_p(t,y)f(y)dy\right) dt\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq \int_0^1 |K(x,t)| \left| \int_0^1 K_p(t,y) f(y) dy \right| dt \\
&\leqq \int_0^1 |K(x,t)| M^p \|f\| dt \\
&= M^p \|f\| \int_0^1 |K(x,t)| dt \\
&\leqq M^{p+1} \|f\|
\end{aligned}
$$

となって (8) が成立する. □

定理 13 の証明を述べる.

定理 13 の証明. $M = 0$ または $\lambda = 0$ の場合に定理が成立していることは明らかであるので $M|\lambda| > 0$ の場合のみ証明する. $0 < M|\lambda| < 1$ とせよ.

解の一意性. $\varphi, \psi \in C[0,1]$ は同じ $f \in C[0,1]$ に対する (1) の解であるとせよ. $\phi := \varphi - \psi$ とする. $\phi = 0$ すなわち $\phi(x) \equiv 0$ すなわち $\|\phi\| = 0$ を示せばよい. φ と ψ のみたす方程式の差をとると,

$$
\phi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) \phi(y) dy, \quad x \in [0,1]
$$

が成立する. よって

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)| &\leqq |\lambda| \int_0^1 |K(x,y)| |\phi(y)| dy \\
&\leqq |\lambda| \int_0^1 |K(x,y)| \|\phi\| dy \\
&= |\lambda| \|\phi\| \int_0^1 |K(x,y)| \|\phi\| dy \\
&\leqq M|\lambda| \|\phi\|
\end{aligned}
$$

が任意の $x \in [0,1]$ で成立するから, 両辺の最大値をとると, $\|\phi\| \leqq M|\lambda| \|\phi\|$ を得る. $0 < M|\lambda| < 1$ で $\|\phi\| \geqq 0$ であるから, これが成立するのは $\|\phi\| = 0$ の場合しかない. よって $\|\phi\| = 0$ がしたがう.

解の存在と公式 (7). (7) は連続関数の関数項級数である. (7) が $[0,1]$ で一様に絶対収束し, かつ, (1) をみたすことを示す. 補題 14 を用いると

$$
\sum_{p=0} (M|\lambda|)^p \|f\| = \frac{\|f\|}{1 - M|\lambda|} < \infty
$$

は (7) の収束する優級数であることがわかる. よって, ワイエルシュトラスの優級数定理により (7) が $[0,1]$ で一様に絶対収束する. ここで, (7) の和を $\varphi(x)$ とする. 一様収束級数であるから, 積分と和の順序交換が成立することに注意すると

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x) - f(x) - \lambda \int_0^1 K(x,y) \varphi(y) dy \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \int_0^1 K_p(x,y) f(y) dy - \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{p+1} \int_0^1 K(x,t) \left(\int_0^1 K_p(t,y) f(y) dy \right) dt \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \int_0^1 K_p(x,y) f(y) dy - \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{p+1} \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,t) K_p(t,y) dt \right) f(y) dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \int_0^1 K_p(x,y) f(y) dy - \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{p+1} \int_0^1 K_{p+1}(x,y) f(y) dy \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \int_0^1 K_p(x,y) f(y) dy - \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \int_0^1 K_p(x,y) f(y) dy \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるので, $\varphi(x)$ は (1) をみたすことがわかる. □

第 6節で利用するために, ノイマン級数解 (7) を

$$
\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 G(x,y;\lambda) f(y) dy,
$$

$$
G(x,y;\lambda) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{p-1} K_p(x,y) \quad x, y \in [0,1],\ |\lambda| < \frac{1}{M} \tag{9}
$$

と表しておく.

5　フレドホルム行列式 $D(\lambda)$

フレドホルムは (1) の積分核を階段関数で近似することにより, (1) を有限次元の連立 1 次方程式で近似するという着想から出発した. $n = 2, 3, 4, \ldots$ とする. 区間 $[0, 1]$ を n 等分して

$$I_1 := \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad I_i := \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \quad (i = 2, \ldots, n)$$

とし, $\chi_i(x)$ を I_i の特性関数, すなわち,

$$\chi_i(x) = 1 \quad (x \in I_i), \quad \chi_i(x) = 0 \quad (x \notin I_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

とする. $K(x, y)$ を階段関数

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} \chi_i(x) \chi_j(y), \quad K_{ij} := K\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$$

に置き換えてみる. このとき, (1) は

$$\varphi(x) - f(x) = \lambda \sum_{i=1} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)/n}^{j/n} \varphi(y) dy \right) \chi_i(x) \tag{10}$$

となる. 右辺が階段関数であることに注意すると,

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \chi_i(x), \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{11}$$

の形になる.

$$f_j := n \int_{(j-1)/n}^{j/n} f(y) dy$$

とおく. (11) を (10) に代入すると

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \psi_i \chi_i(x), \quad \boldsymbol{\psi} &= \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} K_{ij} \int_{(j-1)/n}^{j/n} \left(\sum_{k=1}^{n} \psi_k \chi_k(y) + f(y) \right) dy \right) \chi_i(x) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{K_{ij}}{n} (\psi_j + f_j) \right) \chi_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda}{n} K_{ij} (\psi_j + f_j) \right) \chi_i(x)
\end{aligned}$$

となるので, $\boldsymbol{\psi}$ に対する n 個の方程式からなる連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \frac{\lambda}{n} K_{ij} \right) \psi_j = \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} f_j, \quad i = 1, \ldots, n \tag{12}$$

が得られる. ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタである. この係数行列の行列式を $\Delta_n(\lambda)$ とする. この行列式の具体形を求めたい.

補題 15. $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbb{C})$, $F(t):=\det(E+tA)$ とすると, 次が成り立つ：

$$F(t)=1+\sum_{p=1}^{n}\frac{t^p}{p!}\sum_{k(1)=1}^{n}\cdots\sum_{k(p)=1}^{n}\det\Big([a_{k(i),k(j)}]_{i,j=1,\dots,p}\Big). \tag{13}$$

これを認めると, 直ちに次が得られる.

定理 16.

$$\Delta_n(\lambda)=1+\sum_{p=1}^{n}\left(-\frac{\lambda}{n}\right)^p\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}K\begin{pmatrix} i_1/n & \cdots & i_p/n \\ i_1/n & \cdots & i_p/n \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ t_1 & \cdots & t_p \end{pmatrix}=\det\Big([K(s_i,t_j)]_{i,j=1,\dots,p}\Big).$$

補題 15 の証明. $\mathbb{C}^n$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ とし, $A=[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n]$ とすると,

$$E+tA=[\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n+t\boldsymbol{a}_n]$$

である. $F(t)$ は t の n 次多項式であるから,

$$\begin{aligned}
F(t)&=\sum_{p=0}^{n}\frac{t^p}{p!}F^{(p)}(0)\\
&=\det(E)+t\sum_{k=1}^{n}\det\Big([\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_{k-1},\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{e}_{k+1}\dots,\boldsymbol{e}_n]\Big)+\cdots\\
&=1+t(a_{11}+\cdots+a_{nn})+\cdots
\end{aligned}$$

であるから, 右辺の最初の 2 項は (13) の右辺の最初の 2 項に一致している.

$p\geqq 2$ の場合を考える. (13) では $k(i)=k(j)$ のとき $\det\Big([a_{k(i),k(j)}]_{i,j=1,\dots,p}\Big)=0$ であることに注意する. 一方, $E+tA$ の各列は 2 回微分すると 0 になることに注意すると,

$$\begin{aligned}
F'(t)&=\sum_{k(1)=1}^{n}\det\Big([\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_{k(1)},\dots,\boldsymbol{e}_n+t\boldsymbol{a}_n]\Big),\\
F''(t)&=\sum_{\substack{k(1),k(2)=1\\ k(1)\neq k(2)}}^{n}\det\Big([\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_{k(1)},\dots,\boldsymbol{a}_{k(2)},\dots,\boldsymbol{e}_n+t\boldsymbol{a}_n]\Big),\\
F^{(p)}(t)&=\sum_{\substack{k(1),\dots,k(p)=1\\ k(j)\text{ はすべて相異なる}}}^{n}\\
&\qquad\times\det\Big([\text{第 }k(j)\text{ 列は }\boldsymbol{a}_{k(j)},\text{ その他の第 }l\text{ 列は }\boldsymbol{e}_l+t\boldsymbol{a}_l\text{ の形の行列}]\Big)
\end{aligned}$$

である. よって $p\geqq 2$ のとき

$$F^{(p)}(0)=\sum_{\substack{k(1),\dots,k(p)=1\\ k(j)\text{ はすべて相異なる}}}^{n}$$

$$
\times \det\Big([\text{第 } k(j) \text{ 列は } \boldsymbol{a}_{k(j)},\ \text{その他の第 } l \text{ 列は } \boldsymbol{e}_l \text{ の形の行列}]\Big)
$$

$$
= \sum_{\substack{k(1),\ldots,k(p)=1 \\ k(j)\ \text{はすべて相異なる}}}^{n} \det\Big([a_{k(i),k(j)}]_{i,j=1,\ldots,p}\Big)
$$

$$
= \sum_{k(1),\ldots,k(p)=1}^{n} \det\Big([a_{k(i),k(j)}]_{i,j=1,\ldots,p}\Big)
$$

となる. よって (13) がしたがう. □

さて $n \to \infty$ のとき, $\Delta_n(\lambda)$ は収束することがわかる.

定理 17. 任意の $R > 0$ に対して, $\Delta_n(\lambda)$ は $n \to \infty$ のとき

$$
D(\lambda) := 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p \tag{15}
$$

に $|\lambda| \leqq R$ で一様収束する. $D(\lambda)$ を (1) のフレドホルム行列式という.

証明. $L = \max|K(x,y)|$ とする. 定理 3 により

$$
\left| K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} \right| \leqq p^{p/2} L^p, \quad s_1, \ldots, s_p \in [0,1]
$$

であるから, $|R| \leqq R$ のとき, $\Delta_n(\lambda)$, $D(\lambda)$ はともに

$$
1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^{p/2}(LR)^p}{p!}
$$

を優級数にもつ. これを LR の冪級数だと見る. $(1+1/p)^{-p/2} \to e^{-1/2}$ $(p \to \infty)$ に注意すると, ダランベールの判定法により,

$$
\frac{p^{p/2}/p!}{(p+1)^{(p+1)/2}/(p+1)!} = (p+1)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-p/2} \to \infty \quad (p \to \infty)
$$

となるので, 収束半径は無限大である. よって, $\Delta_n(\lambda)$ と $D(\lambda)$ は同じ収束優級数をもつ.

一方, $\Delta_n(\lambda)$ の係数はリーマン和であり,

$$
\begin{aligned}
D_p := \frac{1}{n^p} \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n} K\begin{pmatrix} i_1/n & \cdots & i_p/n \\ i_1/n & \cdots & i_p/n \end{pmatrix} \\
- \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p
\end{aligned}
$$

とおくと, $n \to \infty$ のとき $D_p \to 0$ が成立する.

優級数は収束する正項級数であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して, $\displaystyle\sum_{p > N(\varepsilon)} p^{p/2}(LR)^p/p! < \varepsilon$ が成立する. 一方, ある $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > n(\varepsilon)$ のとき

$$
|D_p| < \varepsilon, \quad p = 1, \ldots, N(\varepsilon)
$$

が成立する. よって, $n > n(\varepsilon)$ のとき

$$\begin{aligned} |\Delta_n(\lambda) - D(\lambda)| &\leqq \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} \frac{|D_p| R^p}{p!} + 2 \sum_{p=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \frac{p^{p/2}(LR)^p}{p!} \\ &\leqq \varepsilon \sum_{p=1}^{N(\varepsilon)} \frac{R^p}{p!} + 2\varepsilon \\ &\leqq (2 + e^R)\varepsilon \end{aligned}$$

となるので, $|\lambda| \leqq R$ のとき, $\Delta_n(\lambda)$ は $D(\lambda)$ に一様収束することがわかる. □

$D(\lambda) \neq 0$ ならば, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta_n(\lambda) \neq 0$ であるから, (12) は一意的な解

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \chi_i(x)$$

をもつ. クラーメルの公式を用いて $\psi_1, \ldots, \psi_n$ を求めて $n \to \infty$ とすると, (1) の解を求めることができることが知られているが, そのための計算は極めて複雑である. フレドホルムはそのような計算を避けて, 全く異なるアイデアで解を求めた. これを次節で紹介する.

6　$D(\lambda) \neq 0$ の場合

$\det(E-\lambda A) \neq 0$ であるとき, $E-\lambda A$ の逆行列を $E+\lambda B$ の形で求めようとすると, 形式的に得られるものは定理 1 のノイマン級数であり,

$$B = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^{p-1} A^p$$

となるが, λ が小さくないときには有効でない. しかし, フレドホルムの積分方程式 (1) では $D(\lambda) \neq 0$ で λ が小さくないときもこの考え方が有効であることを紹介する. これはフレドホルムが $\Delta_n(\lambda) \neq 0$ のときの連立 1 次方程式 (12) にクラーメルの公式を適用する過程で得た着想によるものである.

本節を通じて $D(\lambda) \neq 0$ のときのみ考える. 線形変換

$$C[0,1] \ni \varphi(x) \mapsto \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy \in C[0,1]$$

の逆変換を

$$C[0,1] \ni \psi(x) \mapsto \psi(x) + \lambda \int_0^1 \Gamma(x,y;\lambda)\psi(y)dy \in C[0,1]$$

の形で求める. 右逆写像および左逆写像であるためには, 積分核 $\Gamma(x,y;\lambda)$ はレゾルベント方程式とよばれる 2 つの積分方程式

$$\Gamma(x,y;\lambda) = K(x,y) + \lambda \int_0^1 K(x,s)\Gamma(s,y;\lambda)ds, \tag{16}$$

$$\Gamma(x,y;\lambda) = K(x,y) + \lambda \int_0^1 \Gamma(x,s;\lambda)K(s,y)ds \tag{17}$$

をみたすことが必要十分である.

$$\Gamma(x,y;\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p A_p(x,y) \tag{18}$$

の形で $\Gamma(x,y,;\lambda)$ を求めよう. 簡単のため

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \lambda^p, \quad a_p = \frac{(-1)^p}{p!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p$$

とおく. (20) を (16) に代入し, 両辺に $D(\lambda)$ をかけると

$$\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p A_p(x,y) = K(x,y) + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \lambda^p K(x,y) + \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{p+1} \int_0^1 K(x,s)A_p(s,y)ds$$

となる. 両辺の λ^p の係数を比較すると

$$\begin{aligned} &A_0(x,y) = K(x,y), \\ &A_p(x,y) = a_p K(x,y) + \int_0^1 K(x,s)A_{p-1}(s,y)ds \quad (p \geqq 1) \end{aligned}$$

という漸化式が得られる.

補題 18.

$$A_p(x,y) = \frac{(-1)^p}{p!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_p \\ y & s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p, \quad p \geqq 1. \tag{19}$$

証明. $p = 1, 2, 3, \ldots$ についての数学的帰納法によって証明する.

まず $p = 1$ の場合を確認する.

$$\begin{aligned}
-A_1(x,y) &= -a_1 K(x,y) - \int_0^1 K(x,s) A_0(s,y) ds \\
&= \int_0^1 \{K(x,y)K(s,s) - K(x,s)K(s,y)\} ds \\
&= \int_0^1 \det \begin{bmatrix} K(x,y) & K(x,s) \\ K(s,y) & K(s,s) \end{bmatrix} dx \\
&= \int_0^1 K \begin{pmatrix} x & s \\ y & s \end{pmatrix} ds
\end{aligned}$$

となって, (19) が $p = 1$ のとき成立していることがわかる.

ある $p - 1$ で (19) が成立するとせよ. A_p は

$$\begin{aligned}
&(-1)^p p! A_p \\
=&(-1)^p p! a_p K(x,y) + (-1)^p p! \int_0^1 K(x,s_1) A_{p-1}(s_1,y) ds_1 \\
=&K(x,y) \int_0^1 \cdots \int_0^1 K \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p \\
&-p \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(x,s) K \begin{pmatrix} s & s_1 & \cdots & s_{p-1} \\ y & s_1 & \cdots & s_{p-1} \end{pmatrix} ds ds_1 \cdots ds_{p-1}
\end{aligned}$$

となる. 行列式を第 1 行で展開し, 第 i 行を第 1 行へ持ち上げると

$$\begin{aligned}
K \begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_p \\ y & s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} &= K(x,y) K \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=1}^p (-1)^i K(x,s_i) K \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_i & \cdots & s_p \\ y & \cdots & s_{i-1} & \cdots & s_p \end{pmatrix} \\
&= K(x,y) K \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} \\
&\quad - \sum_{i=1}^p K(x,s_i) K \begin{pmatrix} s_i & s_1 & \cdots & s_{i-1} & s_{i+1} & \cdots & s_p \\ y & s_1 & \cdots & s_{i-1} & s_{i+1} & \cdots & s_p \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる. この両辺を $[0,1]^p$ で積分し, 第 2 項の各項では積分変数の変換

$$(s_1, \ldots, s_p) \mapsto (s, s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, \ldots, s_{p-1})$$

を施すと

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \cdots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_p \\ y & s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p \\
=&K(x,y) \int_0^1 \cdots \int_0^1 K \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{p}\int_0^1\cdots\int_0^1 K(x,s_i)K\begin{pmatrix} s_i & s_1 & \cdots & s_{i-1} & s_{i+1} & \cdots & s_p \\ y & s_1 & \cdots & s_{i-1} & s_{i+1} & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1\ldots ds_p \\
=&K(x,y)\int_0^1\cdots\int_0^1 K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1\cdots ds_p \\
&-\sum_{i=1}^{p}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 K(x,s)K\begin{pmatrix} s & s_1 & \cdots & s_{p-1} \\ y & s_1 & \cdots & s_{p-1} \end{pmatrix} ds ds_1\ldots ds_{p-1} \\
=&K(x,y)\int_0^1\cdots\int_0^1 K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1\cdots ds_p \\
&-p\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 K(x,s)K\begin{pmatrix} s & s_1 & \cdots & s_{p-1} \\ y & s_1 & \cdots & s_{p-1} \end{pmatrix} ds ds_1\ldots ds_{p-1} \\
=&(-1)^p p! A_p
\end{aligned}
$$

となって, p のときも (19) が成り立つことがわかる. □

$R>0$ を任意の正数とする. アダマールの不等式 (4) により, $|A_p| \leqq (p+1)^{(p+1)/2}L^{p+1}/p!$ である. よって $|\lambda| \leqq R$ のとき

$$D(x,y;\lambda) := \sum_{p=0}^{\infty}\lambda^p A_p(x,y)$$

は収束する正項級数級数,

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(p+1)^{(p+1)/2}L^{p+1}R^p}{p!}$$

を優級数にもつ. よって, $D(x,y;\lambda)$ は $x,y\in[0,1]$, $|\lambda|\leqq R$ で一様収束し, 特に $\lambda\in\mathbb{C}$ について整関数である. よって, $D(\lambda)\neq 0$ のとき,

$$\Gamma(x,y;\lambda) := \frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{20}$$

と定義すると, $\lambda\in\mathbb{C}$ を固定するごとに, 右辺は $x,y\in[0,1]$ について一様に絶対収束して, $x,y\in[0,1]$ について連続関数になる. $D(\lambda)$ は整関数で $D(0)=1$ により $D(\lambda)\not\equiv 0$ であるから, $D(\lambda)$ の零点の全体は孤立点だけからなり位数は有限である. よって $\Gamma(x,y;\lambda)$ は $\lambda\in\mathbb{C}$ の有理型関数である. (20) は (16) だけでなく (17) をみたす.

補題 19. $D(\lambda)\neq 0$ のとき, (20) によって定義される $\Gamma(x,y;\lambda)$ は 2 つのレゾルベント方程式 (16) と (17) の両方をみたす.

証明. (17) をみたすことを示せばよい. (17) の左辺から右辺を引いたものに $D(\lambda)$ をかたものに, (20) を代入すると

$$
\begin{aligned}
&D(\lambda)\Gamma(x,y;\lambda) - D(\lambda)K(x,y) - \lambda D(\lambda)\int_0^1\Gamma(x,s)K(s,y)ds \\
=&\sum_{p=0}\lambda^p A_p(x,y) - K(x,y) - \sum_{p=1}^{\infty}a_p\lambda^p K(x,y) - \sum_{p=0}^{\infty}\lambda^{p+1}\int_0^1 A_p(x,s)K(s,y)ds \\
=&\sum_{p=1}^{\infty}\lambda^p\left\{A_p(x,y) - a_pK(x,y) - \int_0^1 A_{p-1}(x,s)K(s,y)ds\right\}
\end{aligned}
$$

である.

$$A_p(x,y) = a_pK(x,y) + \int_0^1 A_{p-1}(x,s)K(s,y)ds, \quad p = 1,2,3,\ldots \tag{21}$$

を示せば (20) が (17) をみたすことがわかる.

$$\begin{aligned}
&(-1)^p p! \left\{ a_pK(x,y) + \int_0^1 A_{p-1}(x,s)K(s,y)ds \right\} \\
=&K(x,y)\int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} \\
-&p\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(s,y)K\begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_{p-1} \\ s & s_1 & \cdots & s_{p-1} \end{pmatrix} dsds_1 \cdots ds_{p-1}
\end{aligned}$$

となる. 一方 $(-1)^p p! A_p(x,y)$ の行列式を第 1 列で展開し, 第 i 列を第 1 列へ移動すると

$$\begin{aligned}
K\begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_p \\ y & s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} &= K(x,y)K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{i=1}^p (-1)^i K(s_i,y)K\begin{pmatrix} x & \cdots & s_{i-1} & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_i & \cdots & s_p \end{pmatrix} \\
&= K(x,y)K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} \\
&- \sum_{i=1}^p K(s_i,y)K\begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_{i-1} & s_{i+1} & \cdots & s_p \\ s_i & s_1 & \cdots & s_{i-1} & s_{i+1} & \cdots & s_p \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる. よって, この両辺を $[0,1]^p$ で積分し, 第 2 項の各項では積分変数の変換

$$(s_1,\ldots,s_p) \mapsto (s, s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, \ldots, s_{p-1})$$

を施すと

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_p \\ y & s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p \\
=&K(x,y)\int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p \\
-&\sum_{i=1}^p \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(s_i,y)K\begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_{i-1} & s_{i+1} & \cdots & s_p \\ s_i & s_1 & \cdots & s_{i-1} & s_{i+1} & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_p \\
=&K(x,y)\int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p \\
-&\sum_{i=1}^p \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(s,y)K\begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_{p-1} \\ s & s_1 & \cdots & s_{p-1} \end{pmatrix} dsds_1 \ldots ds_{p-1} \\
=&K(x,y)\int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_p \\ s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_p \\
-&p\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(s,y)K\begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_{p-1} \\ s & s_1 & \cdots & s_{p-1} \end{pmatrix} dsds_1 \ldots ds_{p-1}
\end{aligned}$$

が得られるので, (21) が成り立つことがわかる. □

さて, 与えられた $g(x) \in C[0,1]$ に対して, $\psi(x) \in C[0,1]$ を未知関数とする第二種フレドホルム型積分方程式

$$\psi(x) - \lambda \int_0^1 \psi(y) K(y,x) dy = g(x), \quad x \in [0,1] \tag{22}$$

を (1) の転置方程式という. $D(\lambda) \neq 0$ のとき, $\Gamma(x,y,;\lambda)$ を用いて (1) を解こう.

定理 20. 任意の $f(x) \in C[0,1]$ に対して, (1) の解 $\varphi(x) \in C[0,1]$ がただ一つ存在して, 次式で与えられる：

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \Gamma(x,y;\lambda) f(y) dy. \tag{23}$$

定理 20 の証明. レゾルベント方程式 (16) を利用して解の存在を証明し, (17) を利用して解の一意性を示す.

解の存在. (23) によって与えられる $\varphi(x)$ が解であることを示せばよい. 積分方程式 (1) の左辺から右辺を引いたものに (23) を代入し, $\Gamma(x,y;\lambda)$ が (16) をみたすことを用いると

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) - f(x) - \lambda \int_0^1 K(x,y)\varphi(y) dy \\
=&\lambda \int_0^1 \Gamma(x,y;\lambda) f(y) dy - \lambda \int_0^1 K(x,y) f(y) dy \\
-&\lambda^2 \int_0^1 \int_0^K (x,s)\Gamma(s,y;\lambda) f(y) dy ds \\
=&\lambda \int_0^1 \left\{ \Gamma(x,y;\lambda) - K(x,y) - \lambda \int_0^1 K(x,s)\Gamma(s,y;\lambda) ds \right\} f(y) dy \\
=&0
\end{aligned}$$

がしたがう. よって (23) は (1) の解であることがわかる.

解の一意性. $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ はともに同じ $f(x)$ に対する (1) の解であるとせよ. $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ とおくと

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y)\varphi(y) dy \tag{24}$$

をみたすことに注意する. $\varphi(x) \equiv 0$ を示せばよい. 補題 12 により, 任意の $g(x) \in C[0,1]$ に対して

$$\int_0^1 \varphi(x) g(x) dx = 0 \tag{25}$$

を示せばよい.

$$\psi(x) := g(x) + \lambda \int_0^1 g(y) \Gamma(y,x;\lambda) dy$$

とおくと, 解の存在の証明と全く同様にして, $\psi(x)$ は (17) をみたすことがわかる. よって, (24) を用いて, 一部の項で x と y を入れ替え, 最後に (17) を用いると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi(x) g(x) dx &= \int_0^1 \varphi(x) \left(\psi(x) - \lambda \int_0^1 g(y)\Gamma(x,y;\lambda) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\lambda \int_0^1 K(x,y)\varphi(y) dy \right) \psi(x) dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^1 \varphi(x) \left(\lambda \int_0^1 g(y)\Gamma(x,y;\lambda)dy \right) \\
&= \int_0^1 \left(\lambda \int_0^1 K(y,x)\varphi(x)dx \right) \psi(y)dy \\
&- \int_0^1 \varphi(x) \left(\lambda \int_0^1 g(y)\Gamma(x,y;\lambda)dy \right) \\
&= \int_0^1 \varphi(x) \left(\lambda \int_0^1 \psi(y)K(y,x)dy \right) dx \\
&- \int_0^1 \varphi(x) \left(\lambda \int_0^1 g(y)\Gamma(x,y;\lambda)dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \varphi(x) \left(\psi(x) - g(x) - \lambda \int_0^1 g(y)\Gamma(x,y;\lambda)dy \right) dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となって, (25) が示される. □

$D(0) = 1$ であるから, λ が十分小さいとき $D(\lambda) \neq 0$ である. このとき, (1) の解は (7) でも与えられた. 解の一意性により (7) と (23) を比べると

$$
\int_0^1 \{G(x,y;\lambda) - \Gamma(x,y;\lambda)\} f(y)dx = 0, \quad x \in [0,1]
$$

がすべての $f \in C[0,1]$ と十分小さい λ に対して成立する. 補題 12 により, ある $r > 0$ が存在して, $|\lambda| < r$ のとき $G(x,y;\lambda) \equiv \Gamma(x,y;\lambda)$ が成立する. すなわち,

$$
\sum_{p=0} \lambda^p K_{p+1}(x,y) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p A_p(x,y)
$$

が $|\lambda| < r$ 上の正則関数として成立する.

7 $D(\lambda)=0$ の場合

$D(\lambda)=0$ の場合に知られている事実を紹介する. 本稿のこれまでと比べて高度な技術を要するので, 結果のみ紹介する.

(3) で係数行列が正則でない場合に成り立つ事実を, 本節に好都合なようにまとめる. $\det(E-\lambda A)=0$ とする. これは $\det(E-\lambda {}^tA)=0$ と同値である. λ は A および ${}^tA$ の特異値という. $1/\lambda$ は固有値である. $\mathrm{Ker}(E-\lambda A)$ と $\mathrm{Ker}(E-\lambda {}^tA)$ はそれぞれ特異値 λ に属する A および ${}^tA$ の固有空間である. 定理 2 等の本節で必要な事実は以下のようになる.

定理 21. $A\in M_m(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^m$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\det(E-\lambda A)=0$ とする.

- $(E-\lambda A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解が存在するための必要十分条件は, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{y}\in\mathrm{Ker}(E-\lambda {}^tA)$, すなわち, $(E-\lambda {}^tA)\boldsymbol{y}=0$ をみたすすべての $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^m$ に対して, $\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}\rangle_{\mathbb{C}^m}=0$ が成立することである.
- $\dim\bigl(\mathrm{Ker}(E-\lambda A)\bigr)=\dim\bigl(\mathrm{Ker}(E-\lambda {}^tA)\bigr)=m-\mathrm{rank}(E-\lambda A)$.
- $\boldsymbol{b}$ は上の条件をみたすものとする. $r=m-\mathrm{rank}(E-\lambda A)$ とし, $(E-\lambda A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の *1* つの解を $\boldsymbol{x}_0$ とする. $\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_r\}$ を $\mathrm{Ker}(E-\lambda {}^tA\bigr)$ の基底とすると, $(E-\lambda A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解の全体は
$$\{\boldsymbol{x}_0+\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{x}_r \mid \alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{C}\}$$
で与えられる.

$D(\lambda)=0$ のときの, (1) の解の存在するための必要十分条件, および, 解が存在する場合の解の構造に関する結果を述べる. $(E-\lambda)A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ および $(E-\lambda^t)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ に相当するものは, それぞれ $f=0$ の場合の (1) と, $g=0$ の場合の共役方程式 (22) である：

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy,\quad x\in[0,1], \tag{26}$$
$$\psi(x)=\lambda\int_0^1 \psi(y)K(y,x)dy,\quad x\in[0,1]. \tag{27}$$

これらの自明でない解はそれぞれの線形変換

$$\varphi(x)\mapsto\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy,\quad \psi(x)\mapsto\int_0^1 \psi(y)K(y,x)dy$$

の特異値 λ に属する固有関数という. 1 次独立な固有関数の個数は $D(\lambda)=0$ のときの零点の位数 ν を超えないことが知られている.

定理 22. $D(\lambda)=0$ のとき, (26) は自明でない解をもつ. λ は ν 位の零点で, (26) の *1* 次独立な解の個数を r とすると $1\leqq r\leqq\nu$ が成立する. (27) についても全く同様のことが成立する.

$D(\lambda)=0$ のときの (1) の解が存在するための必要十分条件と, 解が存在する場合の解の構造について述べる.

定理 23. $D(\lambda) = 0$ であるとする.

- (1) の解が存在するための必要十分条件は, (27) の任意の解 $\psi(x) \in C[0,1]$ に対して
$$\int_0^1 f(x)\psi(x)dx = 0$$
が成立することである.

- (26) の解の全体における基底を $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ とする. (1) の解 ψ_0 が存在するとき, (1) の解の全体は
$$\{\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_r\varphi_r(x) \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}\}$$
で与えられる.

参考文献

[1] Ivar Fredholm, *Sur une classe D'equations fonctionelles*, Acta Mathematica, **27** (1903), pp.365–390.

[2] 千原 浩之, フレドホルムの積分方程式, 数学セミナー (日本評論社), 2004 年 2 月号, **532** (2004), pp.16-20.

[3] 笠原 晧司, 「微分積分学」, サイエンス社, 1974.

[4] 溝畑 茂, 「積分方程式論入門」, 朝倉書店, 1968.

[5] 三宅 敏恒, 「入門 線形代数」, 培風館, 1991.

[6] 吉田 耕作, 「積分方程式論（第 2 版）」, 岩波書店, 1990.