

# 平面上の X 線変換と再生公式 – CT スキャナーの原理

千原浩之 2020 年 12 月 25 日 (金) Ver.2

## 概要

本稿ではユークリッド空間上のフーリエ変換の基本的事実を手短に準備して、CT スキャナーの原理である平面上の X 線変換と再生公式を紹介する。

## 1 ユークリッド空間上のフーリエ変換

本節では通常の X 線変換の基礎理論構築に必要なユークリッド空間上のフーリエ変換の基本的な事実をまとめておく。  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  とする。  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$  に対して、

$$x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}, \quad \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

とする。  $f(x)$  が  $\mathbb{R}^n$  上の急減少関数であるとは、  $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  であり、任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  に対して

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\beta \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) \right| < \infty$$

が成り立つことである。  $\mathbb{R}^n$  上の急減少関数の全体を  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  とする。  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ならば  $x^\beta \partial_x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  であることに注意する。

**定義 1.**  $\mathbb{R}^n$  上で積分可能な関数  $f(x)$  のフーリエ変換  $\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi)$  を

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

と定義する。ここに、  $x \cdot \xi$  は  $\mathbb{R}^n$  における通常の内積を表す。  $\mathcal{F}^*g(x) := \mathcal{F}g(-x)$  と定義し、  $g$  の共役フーリエ変換という。

フーリエ変換の基本的事実として次が知られている。

**定理 2.**  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  とする。

- $\mathcal{F}[e^{-2\pi i x \cdot h} f](\xi) = \hat{f}(\xi + h)$ ,  $\mathcal{F}[f(\cdot + h)](\xi) = e^{2\pi i h \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$ .
- $\mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right](\xi) = (2\pi i \xi_j) \cdot \hat{f}(\xi)$ ,  $\mathcal{F}[(2\pi i x_j) \cdot f](\xi) = -\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)$ .
- $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  は線形写像である。
- $\mathcal{F}[f * g](\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$  が成立する。ここに

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$$

であり、  $f$  と  $g$  の合成積とか畳み込みとよばれる。

証明. 形式的単純計算により,

$$\mathcal{F}[e^{-2\pi i x \cdot h} f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x \cdot (\xi+h)} f(x) dx = \hat{f}(\xi + h),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(\cdot + h)](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x + h) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i (y-h) \cdot \xi} f(y) dy = e^{2\pi i h \cdot \xi} \hat{f}(\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-2\pi i x \cdot \xi}\right) f(x) dx \\ &= (2\pi i \xi_j) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx = (2\pi i \xi_j) \cdot \hat{f}(\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(2\pi i x_j) \cdot f](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \cdot (2\pi i x_j) \cdot f(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-2\pi i x \cdot \xi}\right) f(x) dx \\ &= - \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx = - \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi). \end{aligned}$$

上の2つの結果を繰り返し用いると,

$$(2\pi i \xi)^\alpha \frac{\partial^\beta \hat{f}}{\partial \xi^\beta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left\{ (2\pi i x)^\beta \cdot f(x) \right\} dx \quad (1)$$

となる.  $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  であるから被積分関数は

$$C(f, \alpha, \beta)(1 + |x|)^{-n-1},$$

$$C(f, \alpha, \beta) := \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ \beta' \leq \beta}} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|)^{n+1} \left| y^{\beta'} \frac{\partial^{\alpha'} f}{\partial y^{\alpha'}}(y) \right|$$

の定数倍で評価されるから, (1) の左辺は有界である. よって,  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  がしたがう. 再び形式的単純計算により,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} g(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-y) \cdot \xi} f(x - y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} g(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i z \cdot \xi} f(z) dz \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i z \cdot \xi} f(z) dz \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} g(y) dy \\ &= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

が得られる. □

さらに次がよく知られている。

**定理 3.**  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  に対して

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

が成立する。さらに、 $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  は全単射で、 $\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} f = f$ ,  $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^* f = f$  が成立する。

これを証明するために補題を2つ用意する。

**補題 4.**  $\mathcal{F}[e^{-\pi|x|^2}](\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$  が成立する。ここに  $|x|^2 = x \cdot x$  である。

**証明.**  $e^{-\pi|x|^2} = e^{-\pi(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$  であるから  $n = 1$  の場合を示せば十分である。  
 $n = 1$  とし  $F(\xi) = \mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi)$  とすると、

$$\begin{aligned} F(0)^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi r^2} 2\pi r dr = \left[ -\frac{d}{dr} e^{-\pi r^2} \right]_0^\infty = 1 \end{aligned}$$

であるから  $F(0) = 1$  である。一方、

$$\begin{aligned} F'(\xi) + 2\pi\xi F(\xi) &= \int_{-\infty}^\infty (-2\pi i x + 2\pi\xi) e^{-2\pi i x \xi - \pi x^2} dx \\ &= i \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial}{\partial x} e^{-2\pi i x \xi - \pi x^2} dx = 0 \end{aligned}$$

となる。よって  $F(\xi)$  は  $(e^{\pi\xi^2} F(\xi))' = 0$ ,  $F(0) = 1$  の解であるから、 $F(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$  が得られる。□

次の補題は乗法公式とよばれる。

**補題 5.**  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  に対して次が成立する：

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi.$$

**証明.** 形式的単純計算により、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} g(\xi) d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \right) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi \end{aligned}$$

が得られる。□

ここで、定理3を証明する。

**定理3の証明.**  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  とし、任意の  $x \in \mathbb{R}^n$  を固定する。 $\delta > 0$  とする。 $g_\delta(\xi) = e^{-\delta^2 \pi |\xi|^2}$  とすると、

$$\hat{g}_\delta(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} e^{-\delta^2 \pi |\xi|^2} d\xi = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \eta / \delta} e^{-\pi |\eta|^2} d\xi = \delta^{-n} e^{-\pi |y|^2 / \delta^2}$$

である.  $f(x+y)$  を  $y$  についてフーリエ変換すると  $e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$  が得られる. よって, 乗法公式により

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|z|^2} f(x+\delta z) dz &= \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) e^{-\pi|y|^2/\delta^2} dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) \hat{g}_\delta(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) g_\delta(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) e^{-\delta^2 \pi |\xi|^2} d\xi \end{aligned}$$

が得られる.  $\delta \downarrow 0$  のとき

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|z|^2} f(x+\delta z) dz &\rightarrow f(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|z|^2} dz = f(x), \\ \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) e^{-\delta^2 \pi |\xi|^2} d\xi &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

であるから, 定理の主張が成立する. □

最後に, X 線変換の再生公式で重要な  $1/x$  の主値積分のフーリエ変換を求める. 以下では  $n=1$  とする. まず, ディリクレ積分の値の計算から始める.

**補題 6.**

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**証明.** これは広義リーマン積分であり, 極限をとる前の状態  $I(\varepsilon, R)$  を考えよう. ここに  $0 < \varepsilon < R$  で

$$\begin{aligned} I(\varepsilon, R) &= \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \int_\varepsilon^R \frac{e^{-ix}}{-x} dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right\} = \frac{1}{2i} \left\{ \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right\} \end{aligned}$$

である. まず,

$$I(\varepsilon, R) \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (\varepsilon \downarrow 0, R \rightarrow \infty) \quad (2)$$

が成立する. そこで,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  で正則な関数  $f(z) = e^{iz}/2iz$  を

$$[-R, -\varepsilon] \cup (-C(\varepsilon)) \cup [\varepsilon, R] \cup C(R), \quad C(\rho) = \{\rho e^{i\theta} \mid \theta \in [0, \pi]\}, \rho > 0$$

という閉積分路上で線積分する. コーシーの積分定理により,

$$I(\varepsilon, R) = \int_{C(\varepsilon)} f(z) dz - \int_{C(R)} f(z) dz \quad (3)$$

が成立する. 右辺の各項を調べる. まず,

$$\int_{C(\varepsilon)} f(z) dz = \frac{1}{2i} \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon \downarrow 0) \quad (4)$$

となる. ここで,

$$\left| \int_{C(R)} f(z) dz \right| = \frac{1}{2} \left| \int_0^\pi e^{iR e^{i\theta}} d\theta \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi |e^{iR e^{i\theta}}| d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta$$

に注意する. なお,  $\theta \in [\pi/2, \pi]$  を  $\theta' = \pi - \theta \in [0, \pi/2]$  によって変数変換し,  $\theta'$  を  $\theta$  と書き改めた. (2), (3), (4) より,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (5)$$

を示せば補題 6 の証明が完了する.  $g(\theta) = \sin \theta - 2\theta/\pi$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$  という関数を考える.

$$g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$g'(\theta) = \cos \theta - \frac{2}{\pi}, \quad g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0, \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} < 0$$

$$g''(\theta) = -\sin \theta < 0 \quad (\theta \in (0, \pi/2))$$

であるから,  $g(\theta)$  の  $\theta \in [0, \pi/2]$  での増減表は

$\theta$	0		$\text{Arccos}(2/\pi)$		$\pi/2$
$g''(\theta)$	0	-	-	-	-
$g'(\theta)$	+	+	0	-	-
$g(\theta)$	0	↗		↘	0

となるので,  $\theta \in [0, \pi/2]$  のとき  $g(\theta) \geq 0$ , すなわち  $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$  が成り立つことがわかる. よって,

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) \leq \frac{\pi}{2R}$$

であるから, (5) が成り立つことがわかる. □

$1/x$  の主値積分のフーリエ変換を計算する.

**補題 7.**

$$\mathcal{F} \left[ \text{vp} \frac{1}{t} \right] (\tau) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{e^{-2\pi i t \tau}}{t} dt = -i\pi \text{sgn}(\tau)$$

が成立する. ここに,  $\pm\tau > 0$  のとき  $\text{sgn}(\tau) = \pm 1$  である.

**証明.**  $\tau \neq 0$  のとき, 単純計算と変数変換  $x = 2\pi t \tau$  により

$$\begin{aligned} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{e^{-2\pi i t \tau}}{t} dt &= \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\cos(2\pi t \tau) - i \sin(2\pi t \tau)}{t} dt \\ &= -2i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(2\pi t \tau)}{t} dt \\ &= -2i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(2\pi t \tau)}{2\pi t \tau} \cdot (2\pi \tau) dt \\ &= \begin{cases} -2i \int_{2\pi|\tau|\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx & (\tau > 0) \\ 2i \int_{-\infty}^{-2\pi|\tau|\varepsilon} \frac{\sin x}{x} dx & (\tau < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} -2i \int_{2\pi|\tau|\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx & (\tau > 0) \\ 2i \int_{2\pi|\tau|\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx & (\tau < 0) \end{cases} \\
&= -2i \operatorname{sgn}(\tau) \int_{2\pi|\tau|\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\
&\rightarrow -2i \operatorname{sgn}(\tau) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -i\pi \operatorname{sgn}(\tau) \quad (\varepsilon \downarrow 0).
\end{aligned}$$

となって結論が得られる.

□

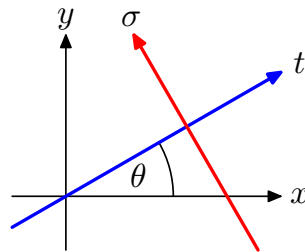
## 2 平面上の X 線変換と再生公式

$(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$  とする. 平面上の  $(-\sin \theta, \cos \theta)$  方向の直線の原点に最も近い点は適当な  $t \in \mathbb{R}$  により点  $(t \cos \theta, t \sin \theta)$  と表されることに注意する. よって, 点  $(t \cos \theta, t \sin \theta)$  を通る  $(-\sin \theta, \cos \theta)$  方向の直線

$$\begin{aligned}
L(\theta, t) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos \theta + y \sin \theta = t\} \\
&= \{(t \cos \theta - \sigma \sin \theta, t \sin \theta + \sigma \cos \theta) \mid \sigma \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

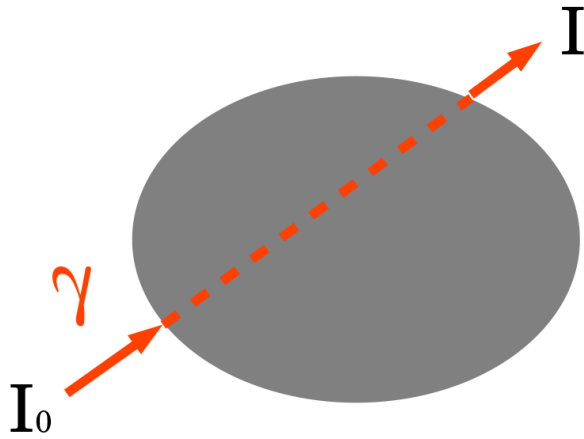
を考えることにより, 平面上の直線は尽くされる.  $L(\theta \pm \pi, -t) = L(\theta, t)$  に注意する. 適当な関数  $f(x, y)$  の X 線変換を

$$\mathcal{X}f(\theta, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - \sigma \sin \theta, t \sin \theta + \sigma \cos \theta) d\sigma$$



と定義する.  $\mathcal{X}f(\theta \pm \pi, -t) = \mathcal{X}f(\theta, t)$  が成り立つことに注意する.

$f(x, y)$  は媒質の 1 つの断面上の密度関数であり, X 線変換はその断面での CT-スキャナーによる観測データであると解釈することができる. CT スキャナーは人体などの媒質の断面を固定するごとに, 断面内の様々な直線に沿う X 線を媒質に照射して, 通過後の X 線の強さを測定し, 断面の画像を構成する機器であり, 主に医療で用いられている. **外側から得られる情報だけを用いて中の様子を観察すること**を可能にする機器である. まず,  $f(x, y)$  が有界領域  $\Omega$  の密度  $d$  の一様な媒質の場合, すなわち,  $(x, y) \in \Omega$  のとき  $f(x, y) = d$ ,  $(x, y) \notin \Omega$  のとき  $f(x, y) = 0$  であるとする.

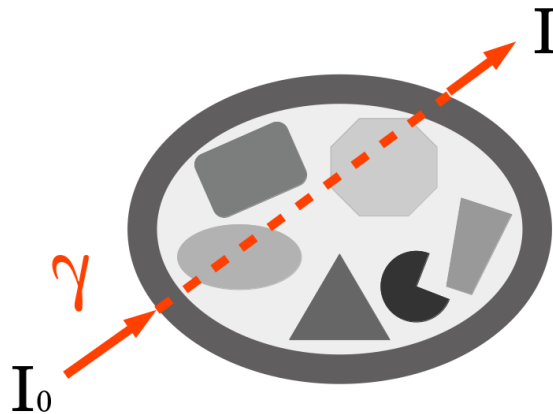


直線  $\gamma$  に沿って密度  $d$  の有界領域に強さ  $I_0$  の X 線を照射すると、X 線は領域内を  $\gamma$  に沿って吸収されながら長さ  $l$  進んで通過し、通過後の強さ  $I$  であったとする。X 線は、媒質の密度が高いほどよく吸収され、通過する長さが長いほどよく吸収されるであろうことは、直感的には納得できるものであろう。実際、光学における Lambert の吸収則によると、 $-\log(I/I_0) > 0$  は  $dl$  に比例することが知られている。ここでは、吸収率を表す物理学的定数は 1 に正規化されているものとする、 $-\log(I/I_0) = dl$  が成立する。これは

$$-\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \int_{\gamma} f = \mathcal{X}f(\gamma), \quad \text{すなわち,} \quad \frac{I}{I_0} = \exp\left(-\int_{\gamma} f\right) = \exp\left(-\mathcal{X}f(\gamma)\right) \quad (6)$$

と見ることができるが、左辺は CT スキャナーの観測データから得られるものなので、右辺も CT スキャナーの観測データと解釈することができる。よって、X 線変換は CT スキャナーの観測データであると見ることができる。

次に、 $f(x, y)$  が有界領域の外で 0 であるような階段関数の場合を考えてみよう。



$f(x, y)$  を  $\gamma$  上に制限すると、 $\gamma$  上の 1 変数の階段関数である。一様媒質の場合をくり返し用いることにより、この場合も (6) が成立することがわかる。実際、 $f$  の  $\gamma$  への制限を  $g(\sigma) := f|_{\gamma}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  とし、領域の部分  $\sigma \in [a, b]$  とすると、

$$g(\sigma) = \sum_{k=1}^n d_k \chi_{[a_{k-1}, a_k]}(\sigma), \quad a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b, \quad d_1, \dots, d_n > 0$$

の形に表される。ここに  $\chi_{[a_{k-1}, a_k]}(\sigma)$  は  $\sigma \in [a_{k-1}, a_k]$  のとき 1, そうでないとき 0 となる関数である。つまり、 $\gamma$  上では  $n$  個の異なる媒質をつなげて得られる媒質になっていて、 $[a_{k-1}, a_k]$  の部分の

長さ  $a_k - a_{k-1}$  の媒質の密度は  $d_k$  である. X 線は  $\sigma = a$  の部分に強さ  $I_0$  で入射し,  $\sigma = b$  の部分から強さ  $I$  で出てくるとする.  $\sigma = a_k$  での X 線の強さを  $I_k$  とすると,  $I = I_n$  であり, それぞれの様な媒質ごとに

$$-\log\left(\frac{I_k}{I_{k-1}}\right) = d_k(a_k - a_{k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

であるから, 和をとって

$$\begin{aligned} -\log\left(\frac{I}{I_0}\right) &= -\log\left(\frac{I_n}{I_{n-1}} \cdots \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{I_1}{I_0}\right) = -\sum_{k=1}^n \log\left(\frac{I_k}{I_{k-1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n d_k(a_k - a_{k-1}) = \int_a^b g(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) d\sigma = \int_{\gamma} f = \mathcal{X}f(\gamma) \end{aligned}$$

となるので, (6) がしたがうことがわかる.

さらに, 一般の適当なクラスの関数  $f(x, y)$  の場合も, 階段関数で近似したものに対して (6) が成立するので, 極限移行することより  $f(x, y)$  自身に対しても (6) が成立することがわかる. よって, 一般の  $f(x, y)$  に対して  $\mathcal{X}f$  は CT スキャナーの観測データであると解釈することができる.

さて, 以上のような背景があるので,

### 与えられた $\mathcal{X}f$ から元の関数 $f$ を再生することはできるか?

は数学だけでなく応用科学にとっても基本的な課題であり, 以下で見るように肯定的に解決される.

次の事実は X 線変換のフーリエ・スライス定理とよばれ, 再生の一意性を保証する. 実際, 下記を認めると  $\mathcal{X}f = 0$  ならば  $f = 0$  がしたがう.

#### 定理 8.

$$\hat{f}(\tau \cos \theta, \tau \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \tau} \mathcal{X}f(\theta, t) dt, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

**証明.** まず, 平面上の内積

$$(t \cos \theta - \sigma \sin \theta, t \sin \theta + \sigma \cos \theta) \cdot (\tau \cos \theta, \tau \sin \theta) = t\tau$$

に注意する. また,

$$(x, y) = (t \cos \theta - \sigma \sin \theta, t \sin \theta + \sigma \cos \theta)$$

により,  $(t, \sigma)$  から  $(x, y)$  への変数変換は回転であることに注意する. よって単純計算により

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i t \tau} \mathcal{X}f(\theta, t) dt &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i t \tau} f(t \cos \theta - \sigma \sin \theta, t \sin \theta + \sigma \cos \theta) d\sigma dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i (t \cos \theta - \sigma \sin \theta, t \sin \theta + \sigma \cos \theta) \cdot (\tau \cos \theta, \tau \sin \theta)} \\ &\quad \times f(t \cos \theta - \sigma \sin \theta, t \sin \theta + \sigma \cos \theta) d\sigma dt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i (x\tau \cos \theta + y\tau \sin \theta)} f(x, y) dx dy \\ &= \hat{f}(\tau \cos \theta, \tau \sin \theta) \end{aligned}$$

となる. □



X線変換の再生公式を紹介して本節を終わることにする。

**定理 9.**  $f(x, y) = O((1 + |x| + |y|)^{-1-\delta})$ ,  $\delta > 0$  とする. 次が成立する :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left( \text{vp} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial_t \mathcal{X}f(\theta, t)}{x \cos \theta + y \sin \theta - t} dt \right) d\theta. \quad (7)$$

**証明.** 平面上の変数変換

$$(\xi, \eta) = (\tau \cos \theta, \tau \sin \theta), \quad (\tau, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$$

は平面極座標と本質的に同じでありヤコビ行列式の絶対値は  $|\tau|$  であることに注意する.

$$\widehat{\mathcal{X}f}(\theta, \tau) = \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi i t \tau} \mathcal{X}f(\theta, t) dt$$

とする. 以下の計算

- 定理 3 の逆フーリエ変換の  $\mathbb{R}^2$  の場合を用いる.
- 定理 8 の X-線変換のフーリエ・スライス定理を用いる.
- 変数変換  $(\xi, \eta) = (\tau \cos \theta, \tau \sin \theta)$  を用いる.
- 定理 2 の合成積のフーリエ変換の  $\mathbb{R}^1$  の場合の逆フーリエ変換

$$\int_{-\infty}^\infty f(\sigma - t)g(t)dt = \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi i \sigma \tau} \hat{f}(\tau)\hat{g}(\tau)d\tau,$$

および, 補題 7 の  $1/t$  の主値積分のフーリエ変換を合わせて用いる.

を順次実施すると

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} \hat{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi i\tau(x \cos \theta + y \sin \theta)} \widehat{\mathcal{X}f}(\theta, \tau) |\tau| d\tau d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi i\tau(x \cos \theta + y \sin \theta)} (-i\pi \operatorname{sgn}(\tau)) \cdot (2\pi i\tau) \cdot \widehat{\mathcal{X}f}(\theta, \tau) d\tau d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty e^{2\pi i\tau(x \cos \theta + y \sin \theta)} (-i\pi \operatorname{sgn}(\tau)) \cdot \widehat{\partial_t \mathcal{X}f}(\theta, \tau) d\tau d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left( \text{vp} \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial_t \mathcal{X}f(\theta, t)}{x \cos \theta + y \sin \theta - t} dt \right) d\theta \end{aligned}$$

が得られる. □

さて, (7) は

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \Lambda \circ \mathcal{X}^* \circ \mathcal{X}f(x, y), \\ \mathcal{X}^* F(x, y) &:= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta, \end{aligned}$$

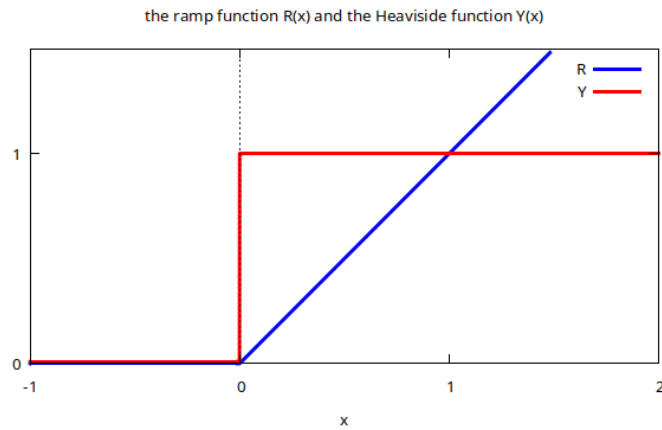
$$\begin{aligned}\Lambda f(x, y) &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{1/2} f(x, y) \\ &:= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} (|2\pi\xi|^2 + |2\pi\eta|^2)^{1/2} \hat{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta\end{aligned}$$

と表すこともできる. ここに  $F(\theta, t)$  は  $F(\theta \pm \pi, -t) = F(\theta, t)$  をみたす関数である.  $\mathcal{X}^*$  を双対 X 線変換,  $\Lambda$  をラプラシアン平方根というが, 応用分野では  $\mathcal{X}^*$  を逆投影 (backprojection),  $\Lambda$  またはその近似的実装をフィルター, 再生公式 (7) またはその近似的実装をフィルター付き逆投影 (filtered backprojection) とよぶことが多いようである.

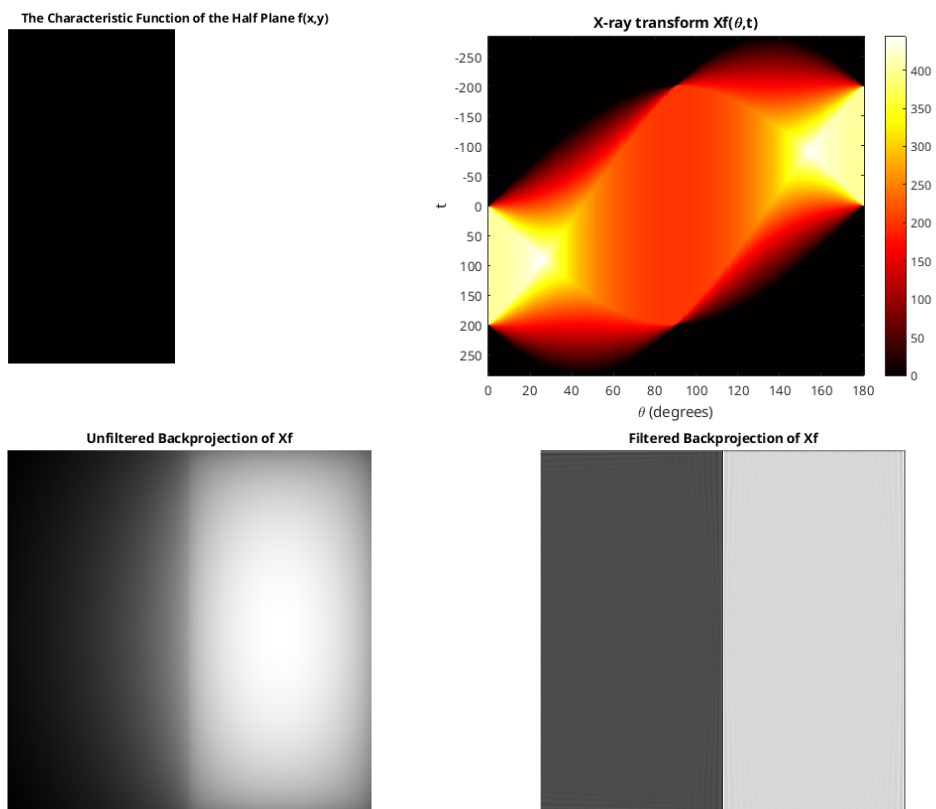
もとの白黒画像・X 線変換・フィルターなし逆投影・フィルター付き逆投影の例を見ておこう. その前に  $x \in \mathbb{R}$  を変数とするランプ関数 (ReLU, rectified linear unit)  $R(x) := \max\{x, 0\}$  のシュワルツ超関数の意味での微分はヘビサイド関数  $Y(x) := \max\{x/|x|, 0\}$  であることに注意する.

$$\frac{d}{dx} R = Y \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \quad (8)$$

各成分を  $R$  とするベクトル値関数  $[R(x_1), \dots, R(x_m)]^T$  は深層学習 (深層神経回路網 DNN や畳込み神経回路網 CNN) における活性化関数の代表例であり, 学習過程の中で (8) が (暗黙のうちに) 利用される.

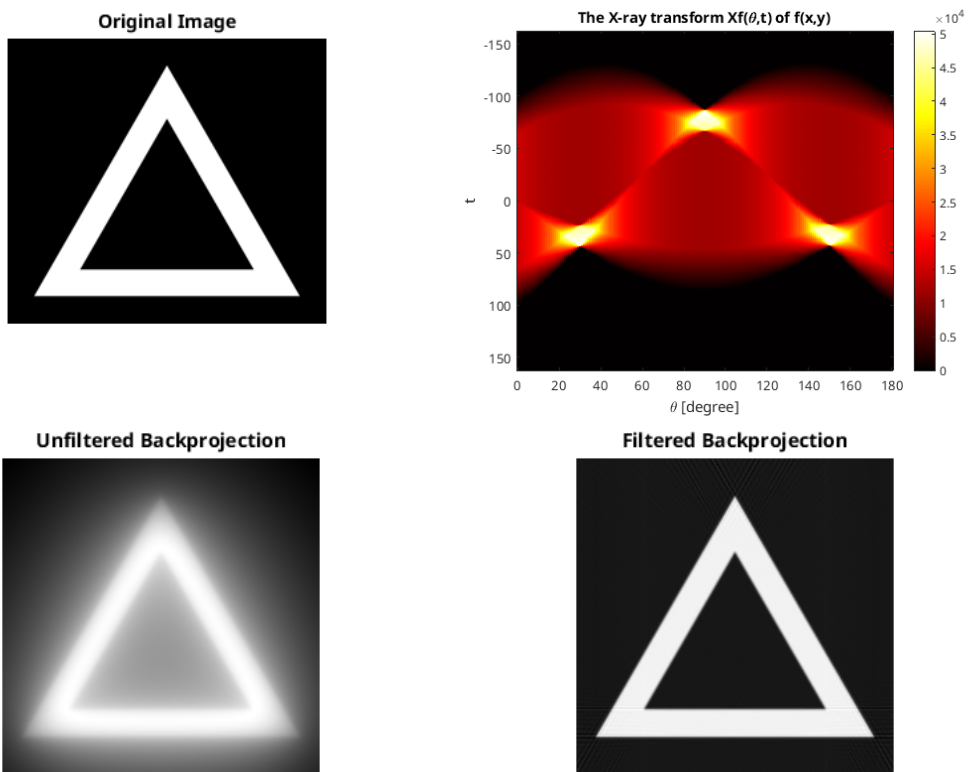


半平面の特性関数  $f(x, y) = Y(x)$  を意識した長方形の特性関数

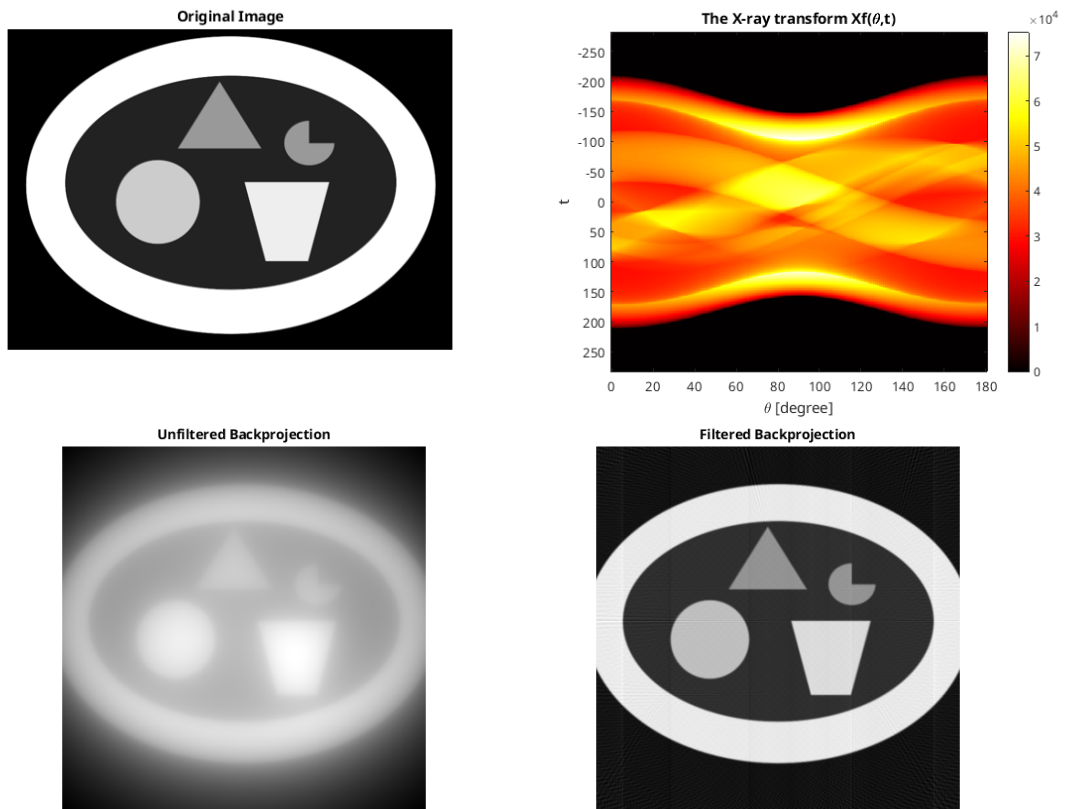


フィルターなしだと白黒の境界がはっきりしないが, 1階微分のようなフィルター  $\Delta$  を作用させて滑らかさを1階下げると境界がはっきりすることがわかる. 別の言い方をすると, 画像データの持つ重要な情報は関数で言うところの特異性である.

正三角形



人体断面を意識した図



以上.